आयतन (Volume)

किसी वस्तु का आयतन वस्तुतः उस वस्तु की धारिता होती है। जैसे- एक गिलास में पानी की जो मात्रा आएगी वह गिलास का आयतन होगा। इसी प्रकार एक ठोस लोहे की गेंद में लोहे की जो मात्रा होगी, वही उसका आयतन होगा। आयतन त्रिविमीय आकृतियों में ही होता है। त्रिविमीय आकृतियों में आयतन के साथ-साथ इनके सतह का क्षेत्रफल ज्ञात करने से संबंधित प्रश्नों की भी चर्चा इस अध्याय में की जाएगी।

सतह (Surface)

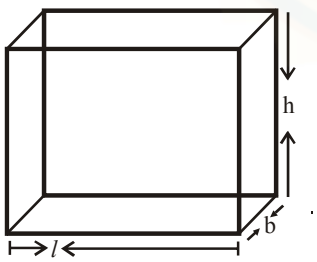
त्रिविमीय आकृति जिन तलों या पृष्ठों द्वारा घिरी होती है, उसे उस आकृति की सतह कहते हैं। चूंकि सतह तलों का क्षेत्रफल होता है, इसलिए इसकी इकाई वर्ग सेमी., वर्ग मी. आदि होती है।

त्रिविमीय आकृतियों में घन, घनाभ, बेलन, शंकु, गोला आदि सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण हैं जिन पर प्रश्न बहुतायत से बनते हैं। यहां हम इन आकृतियों का क्रमशः अध्ययन करेंगे।

घन एवं घनाभ (Cube and Cuboid)

❑ घनाभ (Cuboid)

छः आयताकार तलों से घिरी आकृति को घनाभ कहते हैं। इसके सम्मुख तलों के क्षेत्रफल समान होते हैं। जैसे- कमरा, किताब, ईंट इत्यादि। घनाभ की लंबाई का संकेत l, चौड़ाई का संकेत b तथा ऊंचाई का संकेत h और आयतन का संकेत v होता है।



(a) घनाभ का आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊंचाई

$$v = l \times b \times h$$

(b) घनाभ का पृष्ठ क्षेत्रफल = 2 (लंबाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊंचाई + ऊंचाई × लंबाई)

$$= 2\,(l \times b + b \times h + h \times l)$$

(c) घनाभ का विकर्ण =

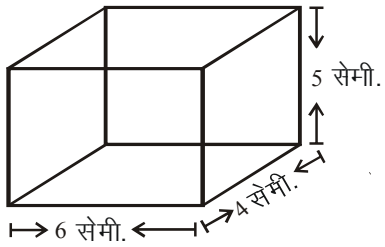
$$\sqrt{(\text{लंबाई})^2 + (\text{चौड़ाई})^2 + (\text{ऊंचाई})^2}$$

$$= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$$

☞ **घनाभ पर एक सरल प्रश्न देखें-**

प्रश्न-एक घनाभ जिसकी लंबाई, चौड़ाई एवं ऊंचाई क्रमशः 6 सेमी., 4 सेमी. एवं 5 सेमी. हो, तो घनाभ का आयतन, पृष्ठ क्षेत्रफल तथा विकर्ण ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि



घनाभ का आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊंचाई

$= 6 \times 4 \times 5 = 120$ घन सेमी.

घनाभ का पृष्ठ क्षेत्र = 2 (लंबाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊंचाई + ऊंचाई × लंबाई)

$= 2(6 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6)$

$= 2(24 + 20 + 30)$

$= 2 \times 74 = 148$ वर्ग सेमी.

तथा घनाभ का विकर्ण

$= \sqrt{(\text{लंबाई})^2 + (\text{चौड़ाई})^2 + (\text{ऊंचाई})^2}$

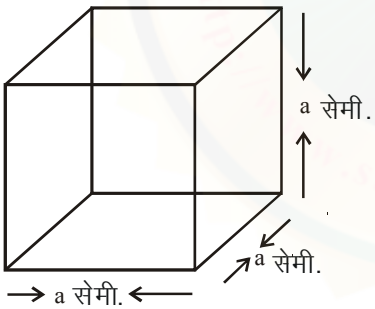
$= \sqrt{(6)^2 + (4)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{36 + 16 + 25} = \sqrt{77}$ सेमी.

⇒ **उत्तर**

❑ घन (Cube)

वह घनाभ जिसकी फलकें समान हों, घन कहलाता है। दूसरे शब्दों में, जिस घनाभ की लंबाई, चौड़ाई तथा ऊंचाई तीनों आपस में समान हों, उसे घन कहते हैं।



(a) घन का आयतन = $(\text{भुजा})^3 = a^3$ घन सेमी.

(b) घन का पृष्ठ क्षेत्रफल = $6 \times (\text{भुजा})^2 = 6a^2$ वर्ग सेमी.

(c) घन का विकर्ण = $\sqrt{3} \times$ भुजा

$= \sqrt{3}a$ सेमी.

☞ **घन पर एक सरल प्रश्न देखें-**

प्रश्न- एक घन की प्रत्येक कोर 10 सेमी. लंबी है। इस घन का आयतन, पृष्ठ क्षेत्रफल एवं विकर्ण ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि

घन का आयतन = $(\text{भुजा})^3$

$= (10)^3 = 1000$ घन सेमी.

घन का पृष्ठ क्षेत्रफल = $6 \times (\text{भुजा})^2$

$= 6 \times (10)^2 = 6 \times 100$

$= 600$ वर्ग सेमी.

तथा घन का विकर्ण = $\sqrt{3} \times$ भुजा

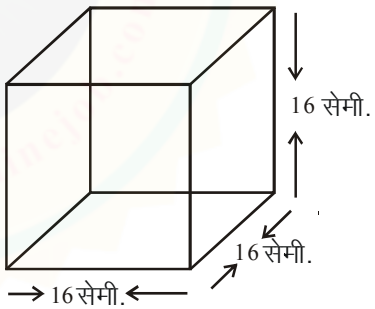
$= \sqrt{3} \times 10$

$= 10\sqrt{3}$ सेमी. ⇒ **उत्तर**

घन और घनाभ पर आधारित उदाहरणार्थ प्रश्न

प्रश्न 1. एक घन की प्रत्येक भुजा 16 सेमी. लंबी है। घन का आयतन, संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल तथा विकर्ण ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि



घन का आयतन = $(\text{भुजा})^3$

$= (16)^3 = 4096$ घन सेमी.

घन के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $6 \times (\text{भुजा})^2$

$= 6 \times (16)^2$

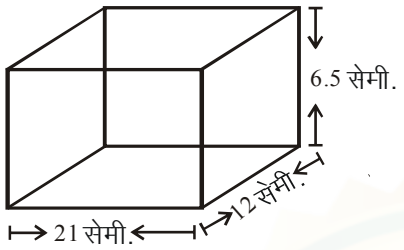
$= 6 \times 256 = 1536$ वर्ग सेमी.

तथा घन का विकर्ण = भुजा × $\sqrt{3}$

$= 16\sqrt{3}$ सेमी. ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 2. एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई तथा ऊंचाई क्रमशः 21 सेमी., 12 सेमी. तथा 6.5 सेमी. है। घनाभ का आयतन, संपूर्ण पृष्ठ एवं विकर्ण ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि



घनाभ का आयतन = लं. × चौ. × ऊं.

$= 21 \times 12 \times 6.5$

$= 1638$ घन सेमी.

घनाभ का संपूर्ण पृष्ठ = 2 (लंबाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊंचाई + ऊंचाई × लंबाई)

$= 2(21 \times 12 + 12 \times 6.5 + 6.5 \times 21)$

$= 2(252 + 78 + 136.5)$

$= 2 \times 466.5 = 933$ वर्ग सेमी. ⇒ **उत्तर**

घनाभ का विकर्ण

$= \sqrt{(\text{लंबाई})^2 + (\text{चौड़ाई})^2 + (\text{ऊंचाई})^2}$

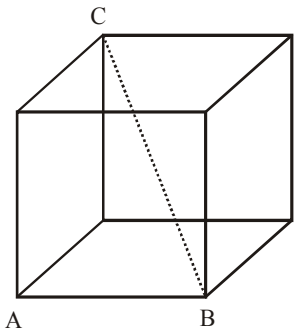
$= \sqrt{(21)^2 + (12)^2 + (6.5)^2}$

$= \sqrt{441 + 144 + 42.25}$

$= \sqrt{627.25} = 25.045$ सेमी.

प्रश्न 3. एक घन के विकर्ण की लंबाई 17.32 सेमी. है। यदि $\sqrt{3} = 1.732$ तो, घन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि



ज्ञात है- घन का विकर्ण (BC) = 17.32 सेमी.

माना घन की प्रत्येक भुजा = a सेमी. है

घन का विकर्ण (BC) = $\sqrt{3}$ × भुजा

$17.32 = \sqrt{3} \times a$

$a = \frac{17.32}{\sqrt{3}}$

$= \frac{17.32}{1.732} = 10$ सेमी.

अतः घन का आयतन = $(\text{भुजा})^3$

$= (10)^3$

$= 10 \times 10 \times 10 = 1000$ घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 4. ठोस धातु के बने तीन घनों का आयतन क्रमशः 125 घन सेमी., 64 घन सेमी. तथा 27 घन सेमी. हैं। तीनों को पिघलाकर एक ठोस घन बनाया गया है। इस घन की प्रत्येक कोर कितनी लंबी होगी?

हल : परंपरागत विधि

माना बड़े ठोस घन की प्रत्येक कोर की लंबाई 'a' सेमी. है।

बड़े ठोस घन का आयतन = तीनों छोटे घनों का कुल आयतन

$a^3 = 125 + 64 + 27$

$a = \sqrt[3]{216}$

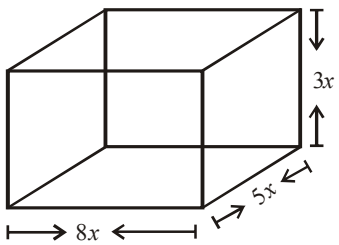
$a = 6$ सेमी. ⇒ **उत्तर**

अतः बड़े ठोस घन की प्रत्येक कोर की लंबाई = 6 सेमी. होगी।

प्रश्न 5. एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई तथा ऊंचाई का अनुपात 8 : 5 : 3 है तथा इसके संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल 63200 वर्ग सेमी. है। घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि

माना घनाभ की लंबाई = $8x$, चौड़ाई = $5x$ एवं ऊंचाई = $3x$ सेमी. है।



घनाभ का संपूर्ण पृष्ठ = 2 (लंबाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊंचाई + ऊंचाई × लंबाई)

$63200 = 2(8x \times 5x + 5x \times 3x + 3x \times 8x)$

$63200 = 2(40x^2 + 15x^2 + 24x^2)$

$2 \times (79x^2) = 63200$

$158x^2 = 63200$

$x^2 = \frac{63200}{158} = 400$

$x = \sqrt{400} = 20$

अत: घनाभ का आयतन = लं. × चौ. × ऊं.

$= 8x \times 5x \times 3x$

$= 120 \times x^3$

$= 120 \times (20)^3$

$= 120 \times 8000$

= 960000 घन सेमी.

⇒ **उत्तर**

प्रश्न 6. एक कमरा 12 मीटर लंबा, 9 मीटर चौड़ा तथा 8 मीटर ऊंचा है। इसमें रखे जा सकने वाले अधिकतम लंबाई के बांस के लग्गे की लंबाई कितनी होगी?

हल : सूत्र विधि

कमरे में रखे जा सकने वाले अधिकतम बांस की लंबाई अर्थात कमरे का विकर्ण =

$\sqrt{(\text{लंबाई})^2 + (\text{चौड़ाई})^2 + (\text{ऊंचाई})^2}$

$= \sqrt{(12)^2 + (9)^2 + (8)^2}$

$= \sqrt{144 + 81 + 64}$

$= \sqrt{289} = 17$ मीटर ⇒ **उत्तर**

अत: अधिकतम बांस के लग्गे की लंबाई 17 मीटर है।

प्रश्न 7. लकड़ी के एक ब्लॉक का मान 5 × 10 × 20 सेमी. है। कम से कम माप वाला लकड़ी का एक ठोस घन बनाने के लिए ऐसे कितने संपूर्ण ब्लॉक की आवश्यकता होगी?

हल : परंपरागत विधि

लकड़ी के ब्लॉक का आयतन = 5 × 10 × 20

= 1000 सेमी.^{3}

सबसे छोटे माप अर्थात 5 सेमी. मान के घन का आयतन = 5 × 5 × 5 = 125 घन सेमी.

कुल ब्लाक की संख्या = $\frac{\text{लकड़ी के ब्लाक का आयतन}}{\text{5 सेमी. मान के घन का आयतन}}$

$= \frac{1000}{125} = 8$ ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 8. एक घनाभ का आयतन एक घन के आयतन का दुगुना है। यदि घनाभ की वीमाएं 9 सेमी. 8 सेमी. और 6 सेमी. है, तो घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना होगा?

हल : सूत्र विधि

घन का आयतन × 2 = घनाभ का आयतन

घन का आयतन × 2 = (9 × 8 × 6) घन सेमी.

घन का आयतन = $\frac{9 \times 8 \times 6}{2}$ घन सेमी.

घन का आयतन = 216 घन सेमी.

घन का आयतन = $(\text{भुजा})^3 = 216$

भुजा = $\sqrt[3]{216} = 6$ सेमी.

अत: घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 × $(\text{भुजा})^2$

$= 6 \times (6)^2$

$= 6 \times 36 = 216$ वर्ग सेमी.

⇒ **उत्तर**

प्रश्न 9. दो घनों का आयतन 1 : 64 के अनुपात में है तद्नुसार उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात कितना होगा?

हल : परंपरागत विधि

माना दोनों घनों की भुजाएं क्रमश: x एवं y हैं। दोनों घनों के आयतनों का अनुपात =

$\frac{(\text{भुजा})^3}{(\text{भुजा})^3} = \frac{x^3}{y^3} = \frac{1}{64} = \frac{1}{4^3}$

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{1}{4}$ .....(i)

अत: दोनों घनों के पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात

$$= \frac{6\times(\text{भुजा})^2}{6\times(\text{भुजा})^2}$$

$$= \frac{6\times(x)^2}{6\times(y)^2}$$

$$= \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

[समीकरण (i) से $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$ रखने पर]

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16} \Rightarrow 1:16 \Rightarrow \text{उत्तर}$$

अत: दोनों घनों के पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात 1 : 16 होगा।

सामान्य समझ पर

दो घनों के आयतनों के घनमूलानुपात में उसकी भुजाओं का अनुपात होगा तथा भुजाओं के वर्गानुपात में उनकी सतह के क्षेत्रफलों का अनुपात होगा।

आयतनों में अनुपात = 1 : 64

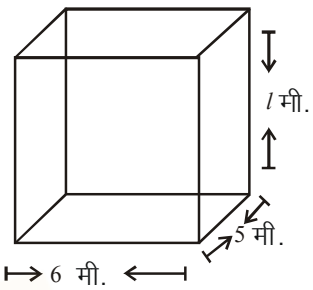
अत: भुजाओं में अनुपात = $\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{64} = 1 : 4$

$\therefore$ पृष्ठीय क्षेत्रफल में अनुपात = $1^2 : 4^2$

$= 1 : 16 \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 10. एक संदूक की भीतरी लंबाई, चौड़ाई एवं ऊंचाई क्रमश: 6 मीटर, 5 मीटर एवं 4 मीटर है। यदि संदूक की लकड़ी की मोटाई 1 मीटर हो तो संदूक के बाहरी पृष्ठों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि



संदूक की बाहरी लंबाई = (6 + 2 × 1) = 8 मी.

संदूक की बाहरी चौड़ाई = (5 + 2 × 1) = 7 मी.

तथा संदूक की बाहरी ऊंचाई = (4 + 2 × 1) = 6 मी.

$\therefore$ संदूक के बाह्य पृष्ठों का क्षेत्रफल

= 2(लं. × चौ. + चौ. × ऊं. + ऊं. × लं.)

= 2(8 × 7 + 7 × 6 + 6 × 8)

= 2(56 + 42 + 48)

= 2 × 146 = 292 वर्ग मीटर $\Rightarrow$ **उत्तर**

अभ्यास प्रश्न

1. यदि एक घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 96 वर्ग सेमी.^{2} है, तो घन का आयतन कितना होगा?
2. यदि एक घन का विकर्ण $\sqrt{12}$ सेमी. है, तो उसका आयतन कितना होगा?
3. यदि दो घनों के आयतनों में 27 : 1 का अनुपात है, तो इनकी भुजाओं में अनुपात क्या होगा?
4. किसी घनाभ की भुजाओं का अनुपात 1 : 2 : 3 है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 88 सेमी.^{2} तो घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।
5. यदि दो घनों के आयतनों का अनुपात 27 : 64 उनके संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?
6. एक आयताकार पैरालेलोपाइप्ड (घनाभ) की लंबाई उसकी चौड़ाई से तीन गुनी है और उसकी ऊंचाई से पांच गुनी है। उसका आयतन 14400 घन सेमी. है, तो कुल पृष्ठ का क्षेत्रफल कितना होगा?

7. एक समलंब घनाकार (घनाभ) बक्से के आधार का क्षेत्रफल 21 वर्ग सेमी. है और उसके एक फलक का क्षेत्रफल 30 वर्ग सेमी. है। तद्नुसार, यदि इस बक्से की प्रत्येक वीमा का संख्यात्मक मान पूर्णांकों में 1 से अधिक हो, तो उस समलंब घनाकार बक्से का आयतन कितने घन सेमी. होगा?

8. यदि प्रत्येक ईंट की माप 25 सेमी. × 11.25 सेमी. × 6 सेमी. हो, तो 8 मीटर लंबी, 6 मीटर ऊंची तथा 22.5 सेमी. मोटी एक दीवार के लिए कितनी ईंटों की आवश्यकता पड़ेगी?

9. एक धातु की आयताकार चादर 40 सेमी. लंबी तथा 15 सेमी. चौड़ी है। चारों कोनों से 4 सेमी. भुजा के समान वर्ग काटे गए हैं। शेष चादर को मोड़कर एक खुला आयताकार संदूक बनाया गया है। संदूक का आयतन कितना होगा?

10. किसी घनाभ के तीन संलग्न तलों के पृष्ठीय क्षेत्रफल p, q, r हैं, तो उसका आयतन कितना होगा?

11. एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई तथा ऊंचाई का योग 19 सेमी. है तथा इसके विकर्ण की लंबाई $5\sqrt{5}$ सेमी. है। इसके संपूर्ण पृष्ठों का क्षेत्रफल कितना है?

12. लोहे के एक चादर की लंबाई 9 मीटर, चौड़ाई 40 सेमी. तथा ऊंचाई 20 सेमी. है। यदि 1 घन मीटर लोहे का भार 50 किग्रा. हो, तो चादर का भार कितना होगा?

13. एक आयताकार पानी की टंकी के आधार का क्षेत्रफल 6500 वर्ग सेमी. है तथा इसमें भरे पानी का आयतन 2.6 घन मीटर है। टंकी में पानी की गहराई कितनी है?

14. a, b, c भुजाओं वाले घनाभ का आयतन V घन इकाई है तथा इसके संपूर्ण पृष्ठों का क्षेत्रफल S वर्ग इकाई है, तब सिद्ध कीजिए $\frac{1}{V}=\frac{2}{S}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$।

15. किसी घनाभ के तीन संगत फलकों के क्षेत्रफल का अनुपात 2 : 3 : 4 है तथा इसका आयतन 9000 घन सेमी. है। सबसे छोटी भुजा की लंबाई क्या होगी?

अभ्यास प्रश्नों का हल

हल 1. परंपरागत विधि

माना घन की भुजा a सेमी. है।

∴ घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 × (भुजा)^2

$96 = 6 \times a^2$

$a^2 = \frac{96}{6} = 16$

a = 4 सेमी.

∴ घन का आयतन = (भुजा)^3

= $(4)^3$ = 64 घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

सूत्र विधि

घन की भुजा = $\sqrt{\frac{96}{6}} = \sqrt{16} = 4$

∴ घन का आयतन = $(4)^3$ = 64 घन सेमी.

⇒ **उत्तर**

हल 2. सूत्र विधि

घन का विकर्ण = $\sqrt{3}$ × भुजा

$\sqrt{12} = \sqrt{3}$ × भुजा

भुजा = $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{4}$

भुजा = 2 सेमी.

अतः घन का आयतन = (भुजा)^3

= $(2)^3$ = 8 घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

हल 3. परंपरागत विधि

माना दोनों घनों की भुजाएं क्रमशः x तथा y इकाई हैं।

∴ दोनों घनों के आयतन में अनुपात = $\frac{(\text{भुजा})^3}{(\text{भुजा})^3}$

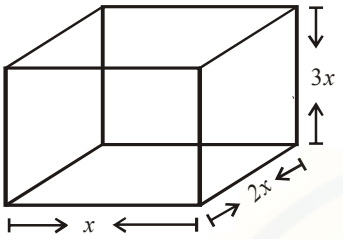
$\frac{27}{1} = \frac{x^3}{y^3}$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{1} \Rightarrow 3:1$$

अतः दोनों घनों के भुजाओं में अनुपात 3 : 1 होगा।

⇒ उत्तर

हल 4. परंपरागत विधि



माना घनाभ की लंबाई, चौड़ाई व ऊंचाई क्रमशः x सेमी., $2x$ सेमी. तथा $3x$ सेमी. है।

घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

= 2(लं. × चौ. + चौ. × ऊं. + ऊं. × लं.)

$88 = 2\,(x \times 2x + 2x \times 3x + 3x \times x)$

$= 2\,(2x^2 + 6x^2 + 3x^2)$

$88 = 2 \times 11x^2$

$$x^2 = \frac{88}{2 \times 11} = 4$$

$x = \sqrt{4} = 2$

∴ घनाभ का आयतन $= x \times 2x \times 3x$

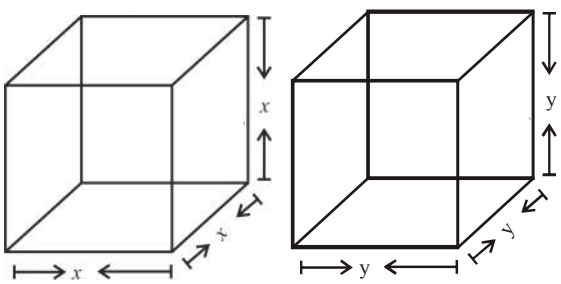
$= 6 \times x^3$

$= 6 \times (2)^3$

$= 6 \times 8 = 48$ घन सेमी.

⇒ उत्तर

हल 5. परंपरागत विधि



माना दोनों घनों की भुजाएं क्रमशः x तथा y हैं। दोनों घनों का आयतन $= \frac{(x)^3}{(y)^3} = \frac{27}{64}$

$$\frac{x^3}{y^3} = \frac{(3)^3}{(4)^3}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

∴ दोनों घनों के संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात

$$= \frac{6 \times (\text{भुजा})^2}{6 \times (\text{भुजा})^2}$$

$$= \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{9}{16} \Rightarrow 9:16$$ ⇒ उत्तर

हल 6. परंपरागत विधि

माना घनाभ की लंबाई $15x$ सेमी. है

∴ घनाभ की चौड़ाई $= 15x \times \frac{1}{3} = 5x$ सेमी.

तथा ऊंचाई $= 15x \times \frac{1}{5} = 3x$ सेमी.

घनाभ का आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊंचाई

$14400 = 15x \times 5x \times 3x$

$225\,x^3 = 14400$

$$x^3 = \frac{14400}{225} = 64$$

$x^3 = 4 \times 4 \times 4$

∴ $x = 4$

इस प्रकार घनाभ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= 2(लं. × चौ. + चौ. × ऊं. + ऊं. × लं.)

$= 2(15x \times 5x + 5x \times 3x + 3x \times 15x)$

$= 2(75x^2 + 15x^2 + 45x^2)$

$= 2 \times 135\,x^2$

$= 2 \times 135 \times (4)^2$

$= 2 \times 135 \times 16$

$= 4320$ वर्ग सेमी. ⇒ **उत्तर**

हल 7. परंपरागत विधि

माना घनाभ की लंबाई = l सेमी., चौड़ाई = b सेमी. तथा ऊंचाई = h सेमी. है।

प्रश्नानुसार, बक्से के आधार का क्षेत्रफल = $l \times b$

= 21 वर्ग सेमी.

= 3× 7 वर्ग सेमी. ....(i)

तथा बक्से के एक फलक का क्षेत्रफल = b × h

= 30 वर्ग सेमी.

= 3 ×10 वर्ग सेमी. ....(ii)

प्रश्नानुसार l, b, h > 1

समी. (i) और समी. (ii) से स्पष्ट है

b = 3 सेमी.

l = 7 सेमी.

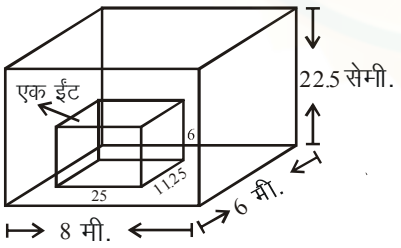
तथा h = 10 सेमी.

∴ घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$

= 3× 7 × 10

= 210 घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

हल 8. सूत्र विधि



$$\text{ईंटों की संख्या} = \frac{\text{दीवार का आयतन}}{\text{एक ईंट का आयतन}}$$

$$= \frac{\text{दीवार की लंबाई} \times \text{ऊंचाई} \times \text{मोटाई}}{\text{एक ईंट की लंबाई} \times \text{ऊंचाई} \times \text{मोटाई}}$$

$$= \frac{(8\times100)\times(6\times100)\times22.5}{25\times11.25\times6}$$

(दीवार की लंबाई = 8 मीटर = 8 × 100 सेमी. तथा ऊंचाई = 6 मीटर = 6 × 100 सेमी. है)

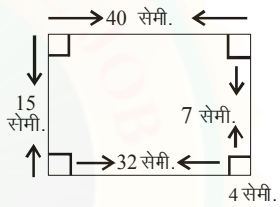
$$= \frac{800\times600\times22.5}{150\times11.25}$$

$= 800 \times 4 \times 2$

= 6400 ⇒ उत्तर

अत: एक मोटी दीवार बनाने में ईंटों की संख्या 6400 होगी।

हल 9. सामान्य समझ पर



∵ चारों कोनों से 4 सेमी. भुजा का वर्ग काटकर संदूक बनाई जाती है।

∴ संदूक की लंबाई = 40 – 4 – 4 = 32 सेमी.

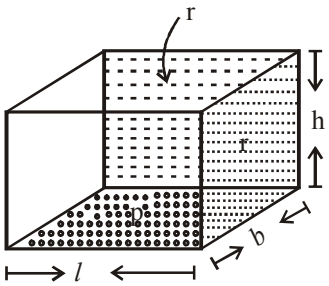
चौड़ाई = 15 – 4 – 4 = 7 सेमी. तथा संदूक की ऊंचाई = 4 सेमी. है।

∴ संदूक का आयतन = लं. × चौ. × ऊं.

= 32× 7 × 4

= 896 सेमी. ⇒ **उत्तर**

हल 10. परंपरागत विधि



माना घनाभ की लंबाई (l), चौड़ाई (b) तथा ऊंचाई (h) है। दिए गए घनाभ के तीन संलग्न तलों का क्षेत्रफल क्रमशः p, q एवं r है।

अतः पहले संलग्न तल का क्षेत्रफल = लं. × चौ.

$$p = lb \quad .... (i)$$

दूसरे संलग्न तल का क्षेत्रफल = चौड़ाई × ऊंचाई

$$q = bh \quad .... (ii)$$

तथा तीसरे संलग्न तल का क्षेत्रफल = ऊंचाई × लंबाई

$$r = hl \quad ....(iii)$$

समीकरण (i), (ii) एवं (iii) के दोनों पक्षों का आपस में गुणा करने पर

$$lb \times bh \times lh = p \times q \times r$$

$$l^2 \times b^2 \times h^2 = pqr$$

$$lbh = \sqrt{pqr}$$

अतः घनाभ का आयतन = lbh

$= \sqrt{pqr}$ होगा। ⇒ **उत्तर**

हल 11. परंपरागत विधि

माना घनाभ की लंबाई = l सेमी., चौड़ाई = b सेमी. तथा ऊंचाई = h सेमी. है।

$$l + b + h = 19 \quad ....(i)$$

(क्योंकि घनाभ की लंबाई, चौड़ाई एवं ऊंचाई का योग 19 है)

घनाभ का विकर्ण = $\sqrt{(\text{लं.})^2 + (\text{चौ.})^2 + (\text{ऊं.})^2}$

$$5\sqrt{5} = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$$

$$l^2 + b^2 + h^2 = 125 \quad .....(ii)$$

समीकरण (i) का वर्ग करने पर

$$(l + b + h)^2 = (19)^2$$

$$l^2 + b^2 + h^2 + 2(lb + bh + hl) = 361$$

$$125 + 2(lb + bh + hl) = 361$$

(समीकरण (ii) से $l^2 + b^2 + h^2 = 125$ रखने पर)

$$2(lb + bh + hl) = 361 - 125$$

$$2(lb + bh + hl) = 236 \quad ....(iii)$$

घनाभ का संपूर्ण पृष्ठ

= 2(लं. × चौ. + चौ. × ऊं. + ऊं. × लं.)

$= 2(lb + bh + hl) = 236$ वर्ग सेमी. ⇒ **उत्तर**

(समीकरण (iii) से $2(lb + bh + hl)$ का मान रखने पर)

हल 12. परंपरागत विधि

चादर की लंबाई = 9 मीटर

चौड़ाई = 40 सेमी. = $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ मीटर

तथा ऊंचाई = 20 सेमी. = $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ मीटर

चादर का आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊंचाई

$= 9 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{18}{25}$ घनमीटर

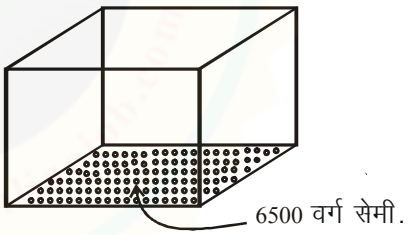
∵ 1 घन मीटर लोहे का भार = 50 किग्रा.

∴ $\frac{18}{25}$ घन मीटर लोहे का भार = $50 \times \frac{18}{25}$

= 36 किग्रा.

अतः चादर का भार = 36 किग्रा. है। ⇒ **उत्तर**

हल 13. परंपरागत विधि



टंकी के आधार का क्षेत्रफल = 6500 वर्ग सेमी.

लं. × चौ. = $\frac{6500}{100 \times 100} = \frac{13}{20}$ वर्ग मीटर

[1 मीटर = 100 सेमी.]

टंकी में भरे पानी का आयतन = 2.6 घन मीटर

लं. × चौ. × ऊं. (गहराई) = $\frac{26}{10}$ घन मीटर

∴ टंकी में पानी की गहराई

$= \frac{\text{टंकी में भरे पानी का आयतन}}{\text{टंकी के आधार का क्षेत्रफल}}$

$$= \frac{\frac{26}{10}}{\frac{13}{20}} = \frac{26}{10} \times \frac{20}{13}$$

= 4 मीटर ⇒ **उत्तर**

हल 14. सूत्र विधि

a, b, c भुजाओं वाले घनाभ का आयतन = abc

V = abc

तथा इस घनाभ का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल

= 2(ab + bc + ca)

S = 2(ab + bc + ca)

$$\because \frac{1}{V} = S \times \frac{1}{S} \times \frac{1}{V}$$

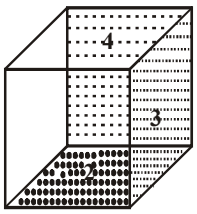
$$= \frac{S}{SV}$$

$$= \frac{2(ab+bc+ca)}{S \times abc}$$

$$= \frac{2}{S}\left(\frac{ab}{abc} + \frac{bc}{abc} + \frac{ca}{abc}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{V} = \frac{2}{S}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$ होगा।

हल 15. परंपरागत विधि



मान तीन संगत फलकों के क्षेत्रफल $2x$, $3x$ एवं $4x$ सेमी. है।

तब

लंबाई × चौड़ाई $(l \times b) = 2x$ ....(i)

चौड़ाई × ऊंचाई $(b \times h) = 3x$ ....(ii)

एवं ऊंचाई × लंबाई $(h \times l) = 4x$ ....(iii)

$(l \times b \times h)^2 = 2x \times 3x \times 4x$

[समीकरण (i), (ii) एवं (iii) के दोनों पक्षों का आपस में गुणा करने पर]

$(l \times b \times h)^2 = 24x^3$ .....(iv)

घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$

= 9000 घन सेमी. (दिया है)

$(9000)^2 = 24x^3$

[$l \times b \times h$ का मान समीकरण (iv) में रखा गया है]

$$x^3 = \frac{9000 \times 9000}{24}$$

$$x^3 = \frac{27000000}{8}$$

$$x = \frac{300}{2} = 150$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

∴ लंबाई × चौड़ाई $(l \times b) = 2 \times 150 = 300$ वर्ग सेमी.

x का मान समीकरण (ii) में रखने पर

चौड़ाई × ऊंचाई $(b \times h) = 3 \times 150 = 450$ वर्ग सेमी. तथा

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

ऊंचाई × लंबाई $(h \times b) = 4 \times 150 = 600$ वर्ग सेमी.

ज्ञात है $l \times b \times h = 9000$

$$h = \frac{9000}{300} = 30 \text{ सेमी.}$$

$$l = \frac{9000}{450} = 20 \text{ सेमी.}$$

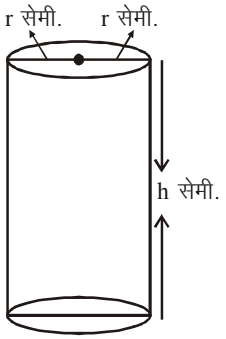
तथा $$b = \frac{9000}{600} = 15 \text{ सेमी.}$$

अतः सबसे छोटी भुजा 15 सेमी. है। ⇒ **उत्तर**

बेलन (Cylinder)

किसी आयत को उसकी एक भुजा के परितः घुमाने पर जो आकृति बनती है, उसे बेलन कहते हैं।

ड्रम, पाइप इत्यादि बेलन के उदाहरण हैं। बेलन का आधार और ऊपरी सिरा समान क्षेत्रफल के वृत्त होते हैं।



(a) बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$= \pi r^2 \times h$

[क्योंकि आधार वृत्त है इसलिए वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2]

(b) बेलन के सिरे और आधार के क्षेत्रफल को छोड़कर जो शेष पृष्ठ क्षेत्रफल होता है, उसे वक्र पृष्ठ कहा जाता है।

बेलन का वक्र पृष्ठ = आधार का परिमाप × ऊंचाई

$= 2\pi r \times h$

$= 2\pi rh$

(चूंकि आधार एक वृत्त है इसलिए वृत्त की परिधि = $2\pi r$)

(c) बेलन का संपूर्ण पृष्ठ = वक्र पृष्ठ + 2 × आधार का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

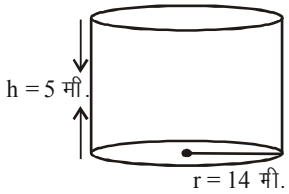
$= 2\pi r(h + r)$

☞ **बेलन पर एक सरल प्रश्न देखें-**

प्रश्न- एक बेलन का आधार 14 मीटर त्रिज्या वाला एक वृत्त है और उसकी ऊंचाई 5 मीटर है। बेलन का आयतन और संपूर्ण सतह ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि

बेलन का आधार वृत्त है।



∴ आधार (वृत्त) का क्षेत्रफल = πr^2

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616$ वर्ग मीटर

∴ बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$= 616 \times 5 = 3080$ घन मीटर

बेलन का वक्र पृष्ठ = आधार का परिमाप/परिधि × ऊंचाई

$= 2\pi r \times h$

[चूंकि आधार एक वृत्त है इसलिए आधार (वृत्त) की परिधि = $2\pi r$]

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 5 = 440$ वर्ग मीटर

बेलन का संपूर्ण पृष्ठ = बेलन का वक्र पृष्ठ + 2 × आधार का क्षेत्रफल

$= 440 + 2 \times 616$

$= 440 + 1232$

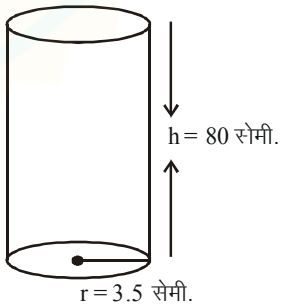
$= 1672$ वर्ग मीटर ⇒ **उत्तर**

बेलन पर आधारित उदाहरणार्थ प्रश्न

प्रश्न 1. एक लंबवृत्तीय बेलन का आयतन, वक्र पृष्ठ तथा संपूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई 80 सेमी. तथा जिसके आधार की त्रिज्या 3.5 सेमी. है।

हल : यहां त्रिज्या (r) = 3.5 सेमी.

ऊंचाई (h) = 80 सेमी. है।



∴ बेलन का आयतन = $\pi \times$ (त्रिज्या)^2 × ऊंचाई

$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 80$

$= 3080$ घन सेमी.

बेलन का वक्र पृष्ठ = $2\pi \times$ त्रिज्या $\times$ ऊंचाई

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 80$$

= 1760 वर्ग सेमी.

बेलन का संपूर्ण पृष्ठ = $2\pi r(h + r)$

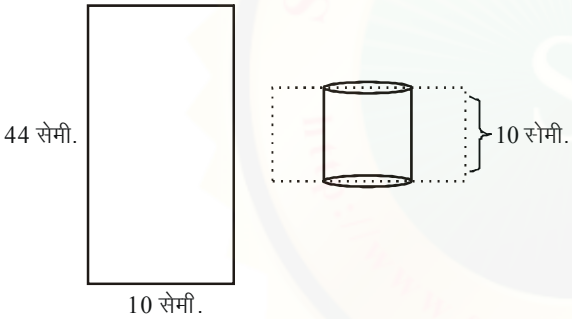
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5\,(80 + 3.5)$$

$$= 2 \times 22 \times 0.5 \times 83.5$$

= 1837 वर्ग सेमी. ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 2. एक आयताकार कागज का टुकड़ा 44 सेमी. लंबा और 10 सेमी. चौड़ा है। चौड़ाई के अनुदिश कागज को गोला करके एक बेलन बनाया जाता है, तो बेलन का आयतन क्या होगा?

हल : सामान्य समझ पर



चौड़ाई के अनुदिश कागज को मोड़ने पर स्पष्टतः बेलन के आधार की परिधि = आयताकार कागज की लंबाई

$2\pi r = 44$ सेमी. ($\therefore$ वृत्त की परिधि = $2\pi r$)

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$$

r = 7 सेमी.

बेलन की ऊंचाई = आयताकार कागज की चौड़ाई

h = 10 सेमी.

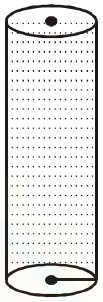
$\therefore$ बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 10$$

= 22 × 7 × 10 = 1540 घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 3. 3.5 मी. त्रिज्या वाले 40 मी. गहरे कुएं की खुदाई में कितनी मिट्टी प्राप्त होगी?

हल : सामान्य समझ पर



r = 3.5 सेमी.

मिट्टी का आयतन = कुएं का आयतन

$= \pi r^2 h$

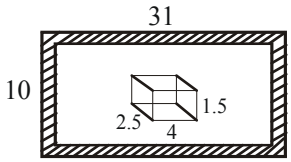
[गहराई (h) = 40 मी. तथा कुएं की त्रिज्या (r) = 3.5 मी.]

$$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 40$$

= 1540 घन मीटर ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 4. 31 मीटर लंबे एवं 10 मीटर चौड़े मैदान में एक तालाब खोदा गया है जिसकी लंबाई, चौड़ाई एवं गहराई क्रमशः 4 मीटर, 2.5 मीटर एवं 1.5 मीटर हैं। इसमें से निकाली गई मिट्टी को शेष मैदान में समान रूप से फैला दिया गया है। मैदान के धरातल की ऊंचाई में कितनी वृद्धि होगी?

हल : परंपरागत विधि



मिट्टी का आयतन = तालाब का आयतन

= तालाब की लंबाई × चौड़ाई × गहराई

$= 4 \times 2.5 \times 1.5$

$= 15$ घन मीटर

मिट्टी बिछाए जाने वाली जगह का क्षेत्रफल = मैदान का क्षेत्रफल – तालाब का क्षेत्रफल

$= 31 \times 10 - 4 \times 2.5$

$= 310 - 10 \Rightarrow 300$ वर्ग मीटर

धरातल की ऊंचाई में वृद्धि =

$$\frac{\text{मिट्टी का आयतन}}{\text{मिट्टी बिछाए जाने वाली जगह का क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{15 \text{ घन मीटर}}{300 \text{ वर्ग मीटर}}$$

$$= \left(\frac{1}{20}\right) \text{मीटर}$$

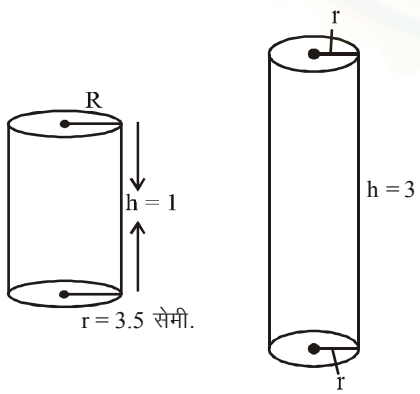
$$= \left(\frac{1}{20} \times 100\right) \text{ सेमी. } (\because 1 \text{ मी.} = 100 \text{ सेमी.})$$

$= 5$ सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 5. दो लंबवृत्तीय बेलनों के आयतन बराबर हैं तथा उनकी ऊंचाइयों का अनुपात 1 : 3 है। उनके आधार की त्रिज्याओं का अनुपात क्या होगा?

हल : परंपरागत विधि

माना दोनों बेलनों की त्रिज्याएं क्रमशः R एवं r हैं। उनकी ऊंचाइयों का अनुपात = 1 : 3 है



माना उनकी ऊंचाइयां h एवं 3h हैं।

दोनों बेलनों के आयतन बराबर है अर्थात

$$\pi R^2 h = \pi r^2 (3h)$$

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{3}{1}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}:1 \Rightarrow \text{उत्तर}$$

अतः दोनों बेलनों के त्रिज्याओं का अनुपात $\sqrt{3}:1$ होगा।

प्रश्न 6. यदि एक बेलन की वक्र सतह उसके सिरों के क्षेत्रफल से दुगुनी हो, तो उसकी ऊंचाई त्रिज्या की कितनी गुनी है? यदि आयतन उसके संपूर्ण पृष्ठ के बराबर कर दिया जाए, तो त्रिज्या कितनी होगी जबकि त्रिज्या भी ऊंचाई के बराबर कर दी जाए?

हल : परंपरागत विधि

माना बेलन की ऊंचाई h तथा त्रिज्या r है।

$\therefore$ बेलन की वक्र सतह या वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

और बेलन के सिरों का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

प्रश्नानुसार,

वक्र सतह = 2 × सिरों का क्षेत्रफल

$2\pi rh = 2 \times 2\pi r^2$

$h = 2r$

अतः ऊंचाई त्रिज्या की दुगुनी है।

दूसरी स्थिति में आयतन = संपूर्ण पृष्ठ

$$\pi r^2 h = 2\pi r (r + h)$$

$$rh = 2 (r + h) \quad \text{....(i)}$$

परंतु त्रिज्या भी ऊंचाई के बराबर की जाती है।

अर्थात $h = r$

$\therefore$ समीकरण (i) में $h = r$ रखने पर

$$r \times r = 2 (r + r)$$

$$r^2 = 2 \times 2r$$

$r = 4$ इकाई $\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 7. एक ठोस बेलन के आधार की त्रिज्या तथा ऊंचाई का योग 37 मीटर है। यदि बेलन का संपूर्ण पृष्ठ 1628 वर्ग मीटर हो, तो इसका आयतन कितना है?

हल : परंपरागत विधि

माना बेलन की त्रिज्या = r मीटर तथा ऊंचाई = h मीटर है, तो r + h = 37 मीटर

(दिया है बेलन की त्रिज्या एवं ऊंचाई का योग 37 मी. है)

बेलन का संपूर्ण पृष्ठ = $2\pi r(r+h)$

$$1628 = 2 \times \frac{22}{7} \times r \times 37$$

$$\therefore r = 1628 \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{37}$$

r = 7 मीटर

$\because$ r + h = 37 मीटर है

$\therefore$ h = 37 – r

h = 37 – 7 = 30 मीटर

अत: बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 30$$

= 4620 घन मीटर ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 8. एक ठोस बेलन का संपूर्ण पृष्ठ 231 वर्ग सेमी. है। यदि इसका वक्र पृष्ठ इसके संपूर्ण पृष्ठ का दो-तिहाई हो, तो बेलन का आयतन कितना होगा?

हल : सूत्र विधि

बेलन का संपूर्ण पृष्ठ = 231 वर्ग सेमी.

$\therefore$ बेलन का वक्र पृष्ठ = $\frac{2}{3} \times$ बेलन का संपूर्ण पृष्ठ

$$2\pi rh = \frac{2}{3} \times 231 = 154 \text{ वर्ग सेमी.....(i)}$$

$\because$ बेलन का संपूर्ण पृष्ठ = 231 वर्ग सेमी.

$\therefore 2\pi rh + 2\pi r^2 = 231$

(समी. (i) से $2\pi rh = 154$ रखने पर)

$$154 + 2\pi r^2 = 231$$

$$2\pi r^2 = 231 - 154$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 77$$

$$r^2 = \frac{77 \times 7}{22 \times 2}$$

$$r^2 = \frac{11 \times 7 \times 7}{11 \times 2 \times 2}$$

$$r = \frac{7}{2}$$

(समी. (i) में $r = \frac{7}{2}$ रखने पर)

$$2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times h = 154$$

$$h = \frac{154}{22} = 7$$

अत: बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 7$$

= 269.5 घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

अत: बेलन का आयतन 269.5 घन सेमी. होगा।

प्रश्न 9. यदि एक बेलन की त्रिज्या r इकाई है। इसके आयतन को किससे गुणा करें कि गुणनफल बेलन के वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल के बराबर हो?

हल : सामान्य समझ पर

बेलन का वक्र पृष्ठ = $2\pi rh$

$$= (\pi r^2 h) \times \frac{2}{r}$$

(r से अंश एवं हर में गुणा करने पर)

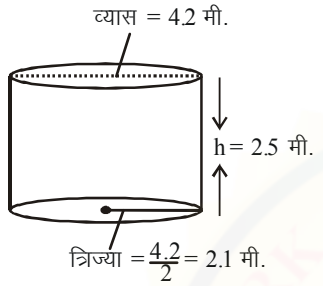
$$= \text{आयतन} \times \frac{2}{r} \Rightarrow \textbf{उत्तर}$$

(क्योंकि बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$ होता है)

अत: बेलन के आयतन में $\frac{2}{r}$ से गुणा करने पर बेलन का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल के बराबर हो जाएगा।

प्रश्न 10. यदि एक बेलनाकार पानी की टंकी का व्यास 4.2 मीटर तथा उसकी ऊंचाई 2.5 मीटर है, तो इस बेलनाकार टंकी की क्षमता कितने लीटर है?

हल : सामान्य समझ पर



टंकी

$\because$ बेलनाकार टंकी की क्षमता = बेलन का आयतन

$\therefore$ बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.5$$

$$\left(\text{त्रिज्या} = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{4.2}{2} = 2.1 \text{ मी.}\right)$$

$$= 22 \times 0.3 \times 2.1 \times 2.5$$

बेलन का आयतन = 34.65 घन मीटर

चूंकि 1 घन मीटर = 1000 लीटर

$\therefore$ 34.65 घन मीटर = (34.65 × 1000) लीटर

= 34650 लीटर $\Rightarrow$ **उत्तर**

अत: बेलनाकार टंकी की क्षमता 34650 लीटर है।

अभ्यास प्रश्न

1. किसी बेलन की त्रिज्या 3 मीटर है और ऊंचाई 14 मीटर है, तो बेलन का वक्र पृष्ठ एवं आयतन ज्ञात करें।
2. यदि एक लंबवृत्तीय बेलन के आयतन और उसके वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल का संख्यात्मक मान बराबर है, तो उसकी त्रिज्या कितनी होगी?
3. यदि एक लंब-वृत्तीय बेलन का आयतन $9\pi h$ घन मीटर हो, जबकि h मीटर में बेलन की ऊंचाई है, तो बेलन के आधार का व्यास कितना होगा?
4. दो बेलनों A तथा B के आधारों की त्रिज्याओं (अर्द्धव्यास) का अनुपात 3 : 2 तथा उनकी ऊंचाइयों का अनुपात n : 1 हो एवं बेलन A का आयतन बेलन B के आयतन का 3 गुना हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।
5. एक बेलनाकार स्तंभ का वक्र पृष्ठ 264 वर्ग मीटर है और उसका आयतन 924 घन मीटर है। इसके व्यास का इसकी ऊंचाई से अनुपात ज्ञात कीजिए।
6. एक लंब वृत्तीय बेलन का आयतन क्या होगा, यदि उसकी ऊंचाई 40 सेमी. हो और उसके आधार की परिधि 66 सेमी. हो?
7. दो लंब वृत्तीय बेलनों की त्रिज्याओं का अनुपात 2 : 3 है और उनकी ऊंचाई 5 : 4 के अनुपात में है। उनके वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
8. दो समान आयतन वाले बेलनों की त्रिज्याओं का अनुपात 3 : 2 है, तो उनकी ऊंचाइयों में अनुपात क्या होगा?
9. 14 सेमी. ऊंचाई वाले एक लंब-वृत्तीय बेलन का आयतन एक 11 सेमी. किनारे वाले घन के आयतन के बराबर है, तो बेलन के आधार की त्रिज्या क्या होगी?
10. 24 सेमी. लंबी तथा 22 सेमी. चौड़ाई वाली धातु की एक आयताकार शीट को इसकी लंबाई के अनुदिश मोड़कर एक लंब-वृत्तीय बेलन बनाया गया है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।
11. यदि किसी बेलन के अर्द्धव्यास (त्रिज्या) को 50% कम करके तथा ऊंचाई को 50% बढ़ाकर एक नया बेलन बनाया जाए, तो बेलन के आयतन में कितनी कमी होगी?
12. एक लंबवृत्तीय बेलन के अर्द्धव्यास (त्रिज्या) तथा उसकी ऊंचाई में से प्रत्येक को 10% बढ़ाया गया है, इससे बेलन के आयतन में कितनी वृद्धि होगी?
13. दोनों सिरों से खुली एक बेलनाकार नली धातु की बनी है। इस नली का आंतरिक व्यास 11.2 सेमी. तथा इसकी लंबाई 21 सेमी. है। धातु प्रत्येक स्थान पर 0.4 सेमी. मोटी है। धातु का आयतन ज्ञात कीजिए।

14. एक बेलनाकार पाइप की धातु का आयतन 748 सेमी.^{3} है। पाइप की लंबाई 14 सेमी. तथा इसका बाहरी अर्द्धव्यास (त्रिज्या) 9 सेमी. है। बेलनाकार पाइप की मोटाई ज्ञात कीजिए।

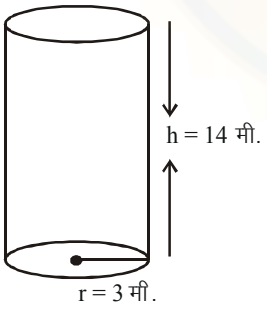
15. पानी से भरे दो बेलनाकार बर्तनों के आधार की त्रिज्याएं क्रमशः 15 सेमी. तथा 10 सेमी. है और इनकी ऊंचाइयां क्रमशः 35 सेमी. तथा 15 सेमी. है। इन बर्तनों के पानी को 15 सेमी. ऊंचे नए बेलनाकार बर्तन में उलट दिए जाने पर यह बर्तन पूरा भर जाता है। इस बर्तन के आधार की त्रिज्या क्या है?

16. एक धातु के खोखले बेलनाकार टुकड़े का बाहरी व्यास 28 मिमी. और आंतरिक व्यास 14 मिमी. है तथा इसका वजन 462 ग्राम है। नट बनाने के लिए इसके चार बराबर टुकड़े किए जाते हैं। यदि धातु का घनत्व 10 ग्राम प्रति घन सेमी. हो तथा छीलन नगण्य हो, तो प्रत्येक टुकड़े की लंबाई ज्ञात कीजिए।

अभ्यास प्रश्नों का हल

हल 1. सूत्र विधि

दिया है बेलन की त्रिज्या (r) = 3 मीटर व ऊंचाई (h)= 14 मीटर।



बेलन का वक्र पृष्ठ = $2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3 \times 14$

= 264 वर्ग मीटर

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 14$

= 396 घन मीटर ⇒ **उत्तर**

हल 2. परंपरागत विधि

माना बेलन की त्रिज्या (r) और ऊंचाई (h) हो, तो बेलन का वक्र पृष्ठ = $2\pi rh$ तथा बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

प्रश्नानुसार, बेलन का आयतन = बेलन का वक्र पृष्ठ

$\pi r^2 h = 2\pi rh$

r = 2 इकाई

अतः बेलन की त्रिज्या 2 इकाई होगी। ⇒ **उत्तर**

सदैव ध्यान दें- यदि बेलन के आयतन एवं वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल का संख्यात्मक मान बराबर हो, तो इस बेलन की त्रिज्या हमेशा 2 इकाई होगी।

हल 3. परंपरागत विधि

माना बेलन की त्रिज्या r मीटर है।

ज्ञात है- ऊंचाई = h मीटर

आयतन = $9\pi h$

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

अर्थात $\pi r^2 h = 9\pi h$ (ज्ञात है)

$r^2 = 9$

r = 3 मीटर

अतः लंबवृत्तीय बेलन का व्यास = 2 × त्रिज्या

= 2 × 3 = 6 मीटर ⇒ **उत्तर**

हल 4. परंपरागत विधि

माना बेलन A एवं B की त्रिज्याएं क्रमशः $3x$ एवं $2x$ है तथा ऊंचाइयां nh एवं h हैं।

∴ पहले बेलन (A) का आयतन = $\pi r^2 h$

$= \pi(3x)^2(nh)$

$= 9\pi x^2 nh$

तथा दूसरे बेलन (B) का आयतन = $\pi(2x)^2 h$

$= 4\pi x^2 h$

बेलन A का आयतन बेलन B के आयतन का तीन गुना है

अर्थात

$$9\pi x^2 nh = 3(4\pi x^2 h)$$
$$9\pi x^2 nh = 12\pi x^2 h$$
$$n = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

अतः n का मान $\frac{4}{3}$ होगा। ⇒ **उत्तर**

हल 5. परंपरागत विधि

बेलनाकार स्तंभ का वक्र पृष्ठ = 264 वर्ग मीटर

$$2\pi rh = 264 \quad .....(i)$$

तथा बेलनाकार स्तंभ का आयतन = 924 घन मीटर

$$\pi r^2 h = 924 \quad .....(ii)$$

समी. (i) में समी. (ii) से भाग देने पर-

$$\frac{2\pi rh}{\pi r^2 h} = \frac{264}{924}$$
$$\frac{2}{r} = \frac{264}{924}$$
$$r = \frac{924 \times 2}{264}$$

बेलन की त्रिज्या (r) = 7 मी.

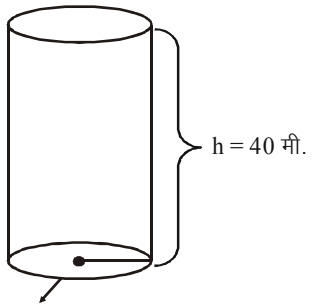
त्रिज्या (r) का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times h = 264$$
$$h = \frac{264}{44} = 6$$

अतः बेलन के व्यास तथा ऊंचाई का अनुपात =

$$\frac{\text{बेलन का व्यास}}{\text{बेलन की ऊंचाई}}$$
$$= \frac{2 \times \text{त्रिज्या}}{\text{ऊंचाई}} \quad (\therefore \text{ बेलन का व्यास} = 2 \times \text{त्रिज्या})$$
$$= \frac{2 \times 7}{6} = \frac{7}{3}$$
$$= 7 : 3 \Rightarrow \text{उत्तर}$$

हल 6. परंपरागत विधि



परिधि $(2\pi r) = 66$ सेमी.

लंबवृत्तीय बेलन के आधार की परिधि = 66 सेमी.

$$\therefore \quad 2\pi r = 66$$
$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 66$$
$$r = \frac{66 \times 7}{22 \times 2} = \frac{21}{2}$$

$\therefore$ बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

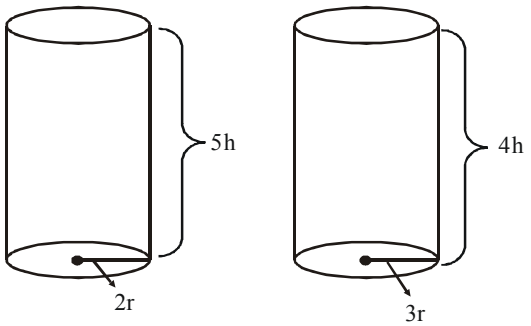
$$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \times 40$$
$$= 22 \times 3 \times 21 \times 10$$
$$= 13860 \text{ घन सेमी.} \Rightarrow \text{उत्तर}$$

हल 7. परंपरागत विधि

माना दोनों बेलनों की त्रिज्याएं क्रमशः 2r एवं 3r तथा उनकी ऊंचाइयां क्रमशः 5h एवं 4h हैं।

दोनों बेलनों के वक्र पृष्ठों के क्षेत्रफल का अनुपात

$$= \frac{\text{पहले बेलन का वक्र पृष्ठ}}{\text{दूसरे बेलन का वक्र पृष्ठ}}$$



$$= \frac{2\pi \times 2r \times 5h}{2\pi \times 3r \times 4h}$$

$$= \frac{5}{6} = 5 : 6 \Rightarrow$$ **उत्तर**

सामान्य समझ पर

पृष्ठ क्षेत्रफल हेतु प्रयुक्त सूत्र है- $2\pi rh$

π को संज्ञान में न लेते हुए r यानी त्रिज्या अनुपात के दो गुने में ऊंचाई अनुपात से गुणा करके पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात जान सकते हैं-

त्रिज्या का अनुपात	→ 2	:	3
2 × त्रिज्या का अनुपात	→ 4	:	6
ऊंचाई का अनुपात	→ 5	:	4
पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात	→ 20	:	24

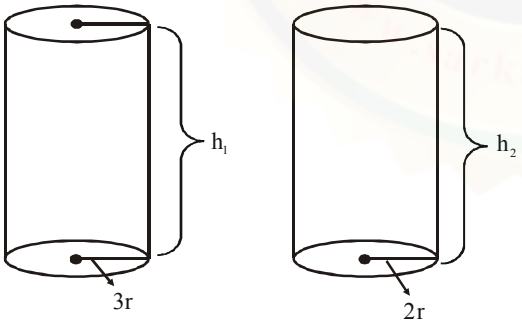
= 5 : 6 ⇒ **उत्तर**

हल 8. परंपरागत विधि

माना दोनों बेलनों की त्रिज्या क्रमशः 3r एवं 2r हैं तथा ऊंचाइयां क्रमशः h_1 एवं h_2 है।

दोनों बेलनों का आयतन बराबर है।

अर्थात $\pi(3r)^2h_1 = \pi(2r)^2h_2$



$$9r^2h_1 = 4r^2h_2$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{4}{9} = 4:9$$

अतः दोनों बेलनों की ऊंचाइयों में 4 : 9 का अनुपात है।

⇒ **उत्तर**

अनुपात समझ पर

आयतन का अनुपात → 1 : 1

(त्रिज्या)^2 का अनुपात → 9 : 4

ऊंचाई का अनुपात→ $\frac{1}{9} : \frac{1}{4} \Rightarrow 4 : 9 \Rightarrow$ **उत्तर**

हल 9. परंपरागत विधि

माना बेलन के आधार की त्रिज्या r है।

∴ बेलन का आयतन = πr^2h

$$= \frac{22}{7} \times r^2 \times 14 \quad (h = 14 \text{ सेमी.})$$

$= 44r^2$ घन सेमी.

चूंकि घन की भुजा = 11 सेमी. है

∴ घन का आयतन = (भुजा)^3

$= (11)^3 = 1331$ घन सेमी.

बेलन का आयतन = घन का आयतन

अर्थात $44r^2 = 1331$

$$r^2 = \frac{1331}{44}$$

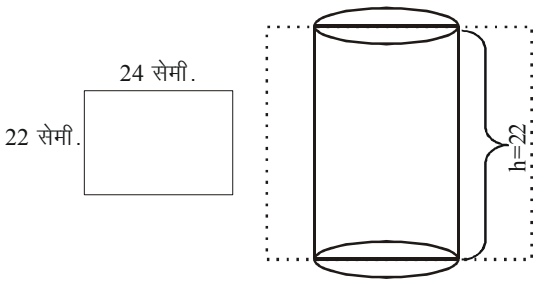
$$r^2 = \frac{121}{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{121}{4}} = \frac{11}{2}$$

= 5.5 सेमी. ⇒ **उत्तर**

अतः लंब-वृत्तीय बेलन की त्रिज्या 5.5 सेमी. है

हल 10. परंपरागत विधि



आयताकार शीट की लंबाई 24 सेमी. एवं चौड़ाई 22 सेमी. है। शीट की लंबाई के अनुदिश मोड़कर बनाए गए बेलन की ऊंचाई 24 सेमी. एवं परिधि 22 सेमी. (चौड़ाई के बराबर) होगी।

माना बेलन की त्रिज्या r सेमी. है।

बेलन के आधार की परिधि = 22 सेमी.

$$2\pi r = 22$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$$

$$r = \frac{7}{2} \text{ सेमी.}$$

अतः बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

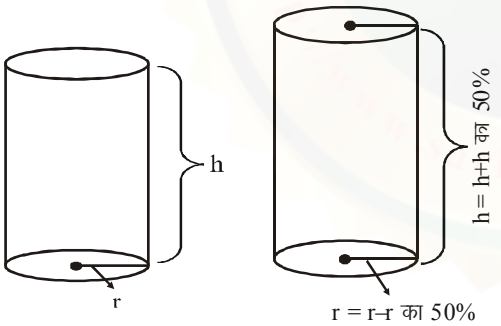
$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 24$$

$$= 11 \times 7 \times 12 = 924 \text{ घन सेमी.}$$

⇒ **उत्तर**

हल 11. परंपरागत विधि

माना प्रारंभिक बेलन की त्रिज्या r एवं ऊंचाई h है।



बेलन का प्रारंभिक आयतन = $\pi r^2 h$

त्रिज्या में 50% कमी करने पर नई त्रिज्या = $r \times \frac{50}{100} = \frac{r}{2}$

तथा ऊंचाई में 50% की वृद्धि करने पर नई ऊंचाई = $h \times \frac{150}{100} = \frac{3h}{2}$

∴ नया आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \times \left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$= \pi \times \frac{r^2}{4} \times \frac{3h}{2}$$

$$= \pi r^2 h \times \frac{3}{8}$$

∴ आयतन में कमी = $\pi r^2 h - \frac{3}{8} \times \pi r^2 h$

$$= \frac{5}{8}\pi r^2 h$$

बेलन के आयतन में प्रतिशत कमी

$$= \frac{\text{बेलन के आयतन में कमी}}{\text{प्रारंभिक बेलन का आयतन}} \times 100$$

$$= \frac{\frac{5}{8}\pi r^2 h}{\pi r^2 h} \times 100$$

$$= \frac{5}{8} \times 100 = 62.5\%$$ ⇒ **उत्तर**

अतः नए बेलन के आयतन में 62.5% कमी हो जाएगी।

गुणा-भाग विधि

	त्रिज्या	×	त्रिज्या	×	ऊंचाई	=	बेलन का आयतन
	↓		↓		↓		↓
पूर्व →	10	×	10	×	10	=	1000 घन सेमी.
नए →	5	×	5	×	15	=	375 घन सेमी.

निष्कर्ष 1. माना प्रारंभिक बेलन की त्रिज्या 10 सेमी. तथा ऊंचाई 10 सेमी. हो, तो बेलन का आयतन = 1000 घन सेमी.

निष्कर्ष 2. बेलन की त्रिज्या में 50% कमी के बाद नए बेलन की त्रिज्या = $10 \times \frac{50}{100} = 5$ सेमी. तथा ऊंचाई में 50% वृद्धि के बाद नए बेलन की ऊंचाई = $10 \times \frac{150}{100} = 15$ सेमी.

निष्कर्ष 3. अब बेलन का आयतन = $5 \times 5 \times 15 = 375$ घन सेमी. होगी।

निष्कर्ष 4. बेलन के आयतन में कमी = $1000 - 375$

$= 625$ घन सेमी.

अतः बेलन के आयतन में प्रतिशत कमी = $\frac{625}{1000} \times 100$

$= 62.5\% \Rightarrow$ **उत्तर**

नोट-ध्यान दें- बेलन का आयतन $\pi r^2 h$ होता है। यहां π प्रारंभिक बेलन एवं नए बेलन दोनों में नियत है, इस लिए उपर्युक्त विधि से प्रश्न हल करने में π को स्थिर रखकर गणना करते हैं।

हल 12. परंपरागत विधि

माना बेलन की त्रिज्या r तथा ऊंचाई h है।

$\therefore$ बेलन का प्रारंभिक आयतन = $\pi r^2 h$

नए बेलन की त्रिज्या = $r \times \frac{110}{100} = \frac{11r}{10}$

तथा नए बेलन की ऊंचाई = $h \times \frac{110}{100} = \frac{11\,h}{10}$

इस प्रकार नए बेलन का आयतन

$$= \pi \times \left(\frac{11r}{10}\right)^2 \times \left(\frac{11\,h}{10}\right)$$

$$= 1.331\ \pi r^2 h$$

$\therefore$ आयतन में वृद्धि = $1.331\ \pi r^2 h - \pi r^2 h$

$= 0.331\ \pi r^2 h$

अतः बेलन के आयतन में प्रतिशत वृद्धि

$$= \frac{\text{बेलन के आयतन में वृद्धि}}{\text{प्रारंभिक बेलन का आयतन}} \times 100$$

$$= \frac{0.331\pi r^2 h}{\pi r^2 h} \times 100$$

$= 0.331 \times 100 = 33.10\%$

$\Rightarrow$ **उत्तर**

गुणा-भाग विधि

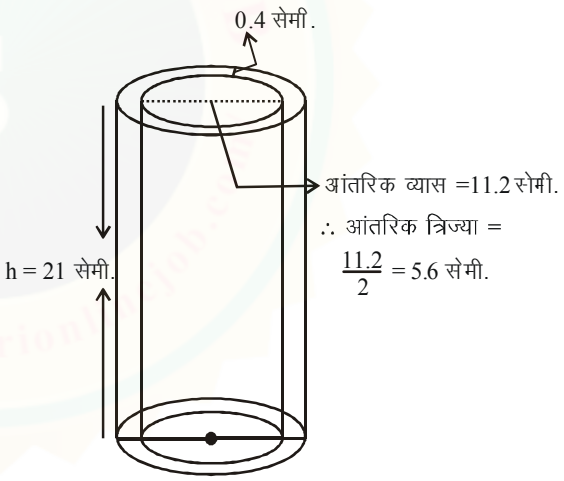
	त्रिज्या	×	त्रिज्या	×	ऊंचाई	=	आयतन
	↓		↓		↓		↓
प्रारंभिक बेलन का आयतन =	10	×	10	×	10	=	1000
नए बेलन का आयतन =	11	×	11	×	11	=	1331

बेलन के आयतन में अभीष्ट प्रतिशत

वृद्धि = $\frac{1331 - 1000}{1000} \times 100$

$= \frac{331 \times 100}{1000} = 33.10\% \Rightarrow$ **उत्तर**

हल 13. परंपरागत विधि



बेलन के आधार की आंतरिक वृत्त की त्रिज्या = 5.6 सेमी.

बेलन के आधार की बाह्य वृत्त की त्रिज्या = $5.6 + 0.4$

$= 6.0$ सेमी.

बेलनाकार धातु की नली का आयतन =

$$\pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h = \pi h\left(r_1^2 - r_2^2\right)$$

(जहां r_1 एवं r_2 क्रमशः बाह्य एवं आंतरिक वृत्त की त्रिज्याएं हैं)

$$= \frac{22}{7} \times 21 \times \{(6)^2 - (5.6)^2\}$$

$= 22 \times 3 \times (36 - 31.36)$

$= 66 \times 4.64$

$= 306.24$ घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

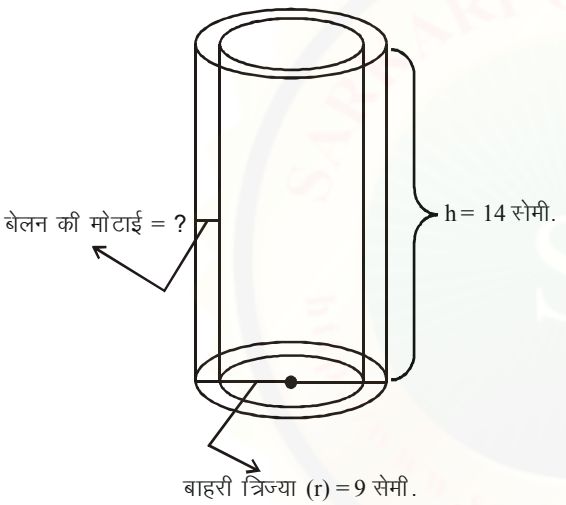
अत: धातु का आयतन 306.24 घन सेमी. है।

हल 14. परंपरागत विधि

पाइप का बाह्य आयतन $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 9 \times 9 \times 14$

$= 44 \times 9 \times 9 = 3564$ घन सेमी.



ज्ञात है- धातु का आयतन = 748 घन सेमी.

∴ टंकी का आंतरिक आयतन = 3564 – 748

= 2816 घन सेमी.

अत: टंकी का आंतरिक आयतन $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times r^2 \times 14$

$= 44r^2$

प्रश्नानुसार, $44r^2 = 2816$

$r^2 = \frac{2816}{44} = 64$

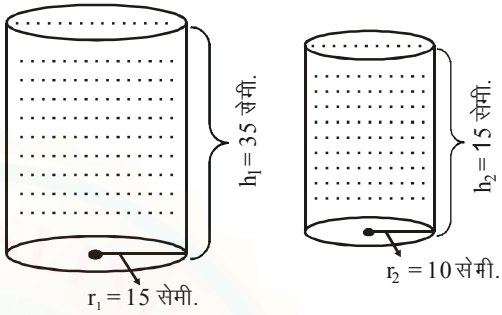
$r = 8$ सेमी.

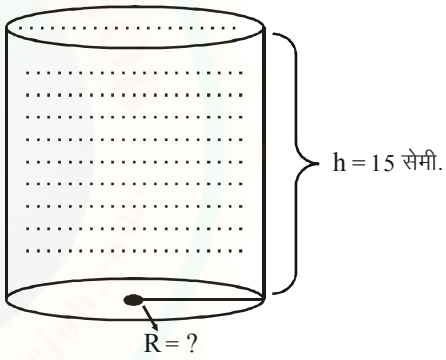
इस प्रकार बेलनाकार पाइप की आंतरिक त्रिज्या = 8 सेमी.

अत: धातु की मोटाई = बाह्य त्रिज्या – आंतरिक त्रिज्या

$= 9 - 8 = 1$ सेमी. ⇒ **उत्तर**

हल 15. परंपरागत विधि





माना पहले बर्तन की त्रिज्या $r_1 = 15$ एवं ऊंचाई $h_1 = 35$ तथा दूसरे बर्तन की त्रिज्या $r_2 = 10$ एवं ऊंचाई $h_2 = 15$ सेमी. है।

∴ पानी से भरे पहले बर्तन का आयतन $= \pi r_1^2 h_1$

$= \pi \times 15 \times 15 \times 35$

$= 7875\pi$ घन सेमी.

तथा पानी से भरे दूसरे बर्तन का आयतन

$= \pi r_2^2 h_2$

$= \pi \times 10 \times 10 \times 15$

$= 1500\pi$ घन सेमी.

∴ दोनों बर्तनों के पानी का आयतन

$= (7875\pi + 1500\pi)$ घन सेमी.

$= (9375\pi)$ घन सेमी.

माना नए बर्तन के आधार की त्रिज्या = R है

[illegible] = $\pi R^2 h$

= $\pi R^2 \times 15$ [नए बर्तन की ऊचाई (h)= 15 सेमी.]

= $(15\pi R^2)$ घन सेमी.

नए बर्तन के पानी का आयतन = दोनों बर्तनों के पानी का आयतन

$$15\pi R^2 = 9375\pi$$

$$R^2 = \frac{9375\pi}{15\pi}$$

$$R = \sqrt{625}$$

R = 25 सेमी.

अत: नए बर्तन की त्रिज्या 25 सेमी. है। ⇒ **उत्तर**

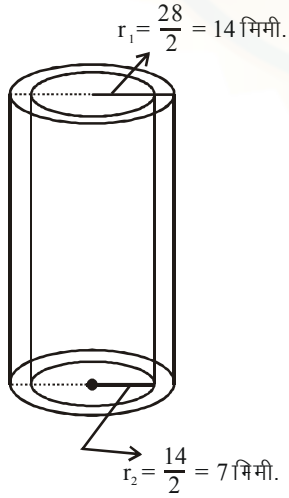
सामान्य समझ पर

	प्रथम बर्तन	+	द्वितीय बर्तन
	↓		↓
(त्रिज्या)^2 →	$(15)^2 = 225$		$(10)^2 = 100$
ऊंचाई →	× 35		× 15
आयतन →	7875	+	1500 = 9325

∴ तृतीय बर्तन के (त्रिज्या)^2 = $\frac{9325}{15}$ = 625

∴ तृतीय बर्तन की त्रिज्या = $\sqrt{625}$ = 25 सेमी. ⇒ **उत्तर**

हल 16. परंपरागत विधि



धातु के बेलनाकार टुकड़े का बाहरी व्यास = 28 मिमी.

= 2.8 सेमी.

∴ धातु के बेलनाकार टुकड़े की बाहरी त्रिज्या (r_1) = $\frac{2.8}{2}$ = 1.4 सेमी.

धातु के बेलनाकार टुकड़े की आंतरिक त्रिज्या (r_2) = $\frac{14}{2}$

= 7 मिमी.

= 0.7 सेमी.

माना टुकड़े की लंबाई l है।

∴ खोखले बेलनाकार टुकड़े में लगी धातु का आयतन =

$$\pi \times \left(r_1^2 - r_2^2\right) \times l$$

$$= \frac{22}{7} \times \left\{(1.4)^2 - (0.7)^2\right\} \times l$$

$$= \frac{22}{7} \times (1.4 + 0.7)(1.4 - 0.7) \times l$$

$$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 0.7 \times l$$

= $(22 \times 2.1 \times 0.1 \times l)$ घन सेमी.

∵ धातु का घनत्व 10 ग्राम/घन मी. है।

∴ धातु का वजन = आयतन × घनत्व

462 ग्राम = $(22 \times 2.1 \times 0.1 \times l) \times 10$ ग्राम

$$l = \frac{462}{22 \times .21 \times 10} = \frac{462}{22 \times 2.1}$$

$$= \frac{462 \times 10}{22 \times 21}$$

[दशमलव हटाने के लिए अंश एवं हर में 10 से गुणा किया गया]

l = 10 सेमी. = 100 मिमी.

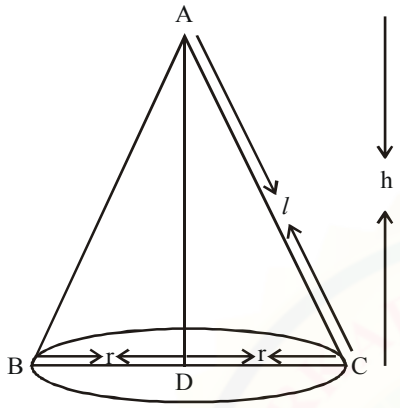
इस टुकड़े से चार बराबर-बराबर टुकड़े बनाए जाते हैं।

∴ प्रत्येक टुकड़े की लंबाई = $\frac{100}{4}$ = 25 मिमी.

⇒ **उत्तर**

शंकु (Cone)

शंकु वह आकृति है जिसका पार्श्व पृष्ठ वक्र और आधार एक वृत्त हो।



शंकु की ऊंचाई का संकेत h तथा त्रिज्या का संकेत r होता है। उपर्युक्त चित्र में प्रदर्शित शंकु ABC की ऊंचाई AD = h और आधार की त्रिज्या BD = CD = r है।

AD को शंकु की लंबवत ऊंचाई और AB या AC को तिर्यक ऊंचाई या तिरछी ऊंचाई कहते हैं। तिरछी ऊंचाई का संकेत l होता है। आधार को छोड़कर जो वक्र पृष्ठ होता है, उसे तिरछा पृष्ठ या तिर्यक पृष्ठ कहते हैं।

(a) तिर्यक ऊंचाई $(l) = \sqrt{(\text{त्रिज्या})^2 + (\text{ऊंचाई})^2}$

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

(b) तिरछा पृष्ठ (वक्र तल) = $\pi \times$ त्रिज्या $\times$ तिर्यक ऊंचाई

$$= \pi r l$$

(c) संपूर्ण पृष्ठ = तिरछा पृष्ठ (वक्र तल) + आधार का क्षेत्रफल $= \pi r l + \pi r^2$

[क्योंकि आधार एक वृत्त है, इसलिए वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2]

$$= \pi r (l + r)$$

(d) शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊंचाई

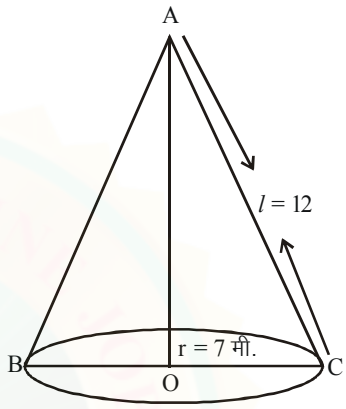
$$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

☞ **शंकु पर एक सरल प्रश्न देखें-**

प्रश्न- एक शंकु की त्रिज्या 7 मीटर है और उसकी तिर्यक ऊंचाई 12 मीटर है। शंकु का आयतन तथा संपूर्ण सतह ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि



शंकु की त्रिज्या (OB = OC) = 7 मी.

शंकु की तिर्यक ऊंचाई = 12 मी.

शंकु की ऊंचाई = ?

शंकु की ऊंचाई =

$\sqrt{(\text{शंकु की तिर्यक ऊंचाई})^2 - (\text{शंकु की त्रिज्या})^2}$

$= \sqrt{(12)^2 - (7)^2} = \sqrt{144 - 49}$

$= \sqrt{95} = 9.75$ मी.

$\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 9.75$

$= 500.5$ घन मीटर

तथा शंकु का संपूर्ण सतह $= \pi r l + \pi r^2$

$= \pi r (l + r)$

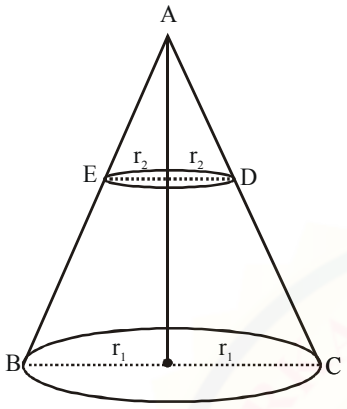
$= \frac{22}{7} \times 7 (12 + 7)$

$= 22 \times 19 = 418$ वर्ग मीटर

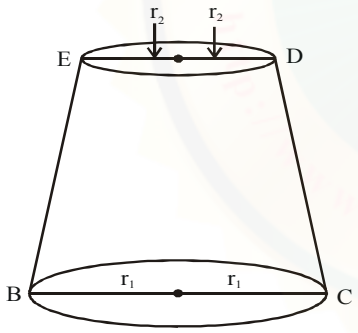
⇒ उत्तर

छिन्नक (Frustum)

शंकु के कुछ ऊपरी भाग को आधार के समांतर समतल द्वारा काट देने से बचे ठोस को छिन्नक कहते हैं।



उपर्युक्त चित्र में शंकु ABC से आधार BC के समांतर तल DE द्वारा ऊपर का भाग काट लिया गया है। इस प्रकार शेष भाग BC DE को शंकु का छिन्नक कहेंगे।



छिन्नक

आधार की त्रिज्या r_1 तथा ऊपरी सिरे की त्रिज्या r_2 है। BE या CD छिन्नक की तिरछी ऊंचाई (l) है।

(a) छिन्नक का तिरछा पृष्ठ या वक्र पृष्ठ $= \pi(r_1+r_2).l$

(b) छिन्नक का संपूर्ण पृष्ठ = तिरछा पृष्ठ + $\pi r_1^2 + \pi r_2^2$

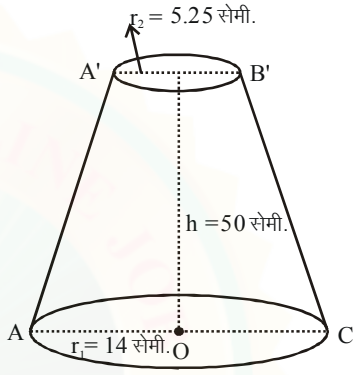
$$= \pi\{(r_1 + r_2)l + r_1^2 + r_2^2\}$$

(c) छिन्नक का आयतन $= \dfrac{\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)h}{3}$

☞ **शंकु छिन्नक पर एक सरल प्रश्न देखें-**

प्रश्न- एक शंकु के छिन्नक के एक सिरे की त्रिज्या 14 सेमी. तथा दूसरे सिरे की त्रिज्या 5.25 सेमी. तथा ऊंचाई 50 सेमी. है। इसका आयतन तथा संपूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि



छिन्नक का संपूर्ण पृष्ठ $= \pi\{(r_1 + r_2)l + r_1^2 + r_2^2\}$

छिन्नक की तिरछी ऊंचाई (l)$= \sqrt{(h)^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$= \sqrt{(50)^2 + (14-5.25)^2} = \sqrt{2500 + (8.75)^2}$

$= \sqrt{2500 + 76.5625} = \sqrt{2576.5625}$

= 50.76 सेमी. लगभग

इस प्रकार छिन्नक का संपूर्ण पृष्ठ

$= \dfrac{22}{7}\{(14 + 5.25)50.76 + (14)^2 + (5.25)^2\}$

$= \dfrac{22}{7}\{977.13 + 196 + 27.5625\}$

$= \dfrac{22}{7} \times 1200.6925$

$= 22 \times 171.5275$

= 3773.605 वर्ग सेमी.

छिन्नक का आयतन $= \dfrac{\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)h}{3}$

$$= \frac{\frac{22}{7}\left\{(14)^2 + (5.25)^2 + 14 \times 5.25\right\} \times 50}{3}$$

$$= \frac{22(196 + 27.5625 + 73.5) \times 50}{7 \times 3}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{297.0625 \times 50}{3}$$

$$= \frac{22 \times 42.4375 \times 50}{3}$$

= 15560.417 घन सेमी.

शंकु पर आधारित उदाहरणार्थ प्रश्न

प्रश्न 1. किसी समकोण वृत्ताकार शंकु का व्यास 14 मीटर है तथा इसकी तिरछी ऊंचाई 12 मीटर है। इसका

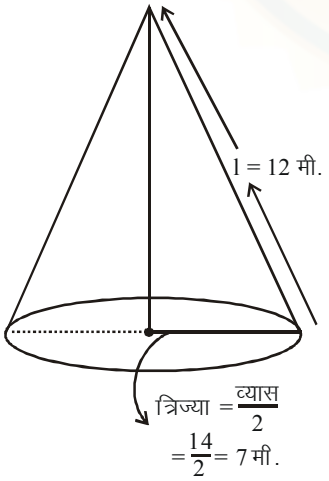
(a) वक्र सतह का क्षेत्रफल

(b) कुल सतह का क्षेत्रफल

(c) आयतन

(d) 14 पैसे प्रति वर्ग मीटर की दर से कुल सतह को रंगने का खर्च क्या होगा?

हल : सूत्र विधि



(a) वक्र सतह का क्षेत्रफल = $\pi r l$

दिया है- त्रिज्या (r) = $\frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{14}{2}$ = 7 मीटर

तिरछी ऊंचाई (l) = 12 मीटर

$\therefore$ वक्र सतह का क्षेत्रफल = $\frac{22}{7} \times 7 \times 12$

= 22 × 12 = 264 वर्ग मीटर ⇒ **उत्तर**

(b) कुल सतह का क्षेत्रफल = $\pi r(r + l)$

$= \frac{22}{7} \times 7(7 + 12)$

= 22 × 19 = 418 वर्ग मीटर

⇒ **उत्तर**

(c) शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

अब ऊंचाई (h) = $\sqrt{(\text{तिरछी ऊंचाई})^2 + (\text{त्रिज्या})^2}$

$= \sqrt{(12)^2 - (7)^2}$

$= \sqrt{144 - 49}$

ऊंचाई = $\sqrt{95}$ = 9.75 मीटर

$\therefore$ शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 9.75$

= 500.5 घन मीटर

⇒ **उत्तर**

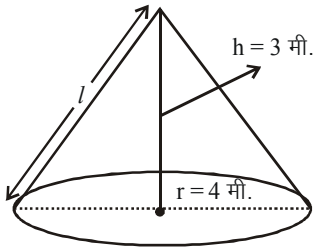
(d) $\because$ 1 वर्ग मीटर सतह को रंगने का खर्च = 14 पैसा

$\therefore$ शंकु के कुल सतह अर्थात 418 वर्ग मीटर सतह को रंगने का खर्च = 418 × 14 = 5852 पैसा

= 58.52 रु. ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 2. एक शंकु की ऊंचाई 3 मीटर तथा उसकी त्रिज्या 4 मीटर है। शंकु की तिरछी ऊंचाई एवं तिरछा पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि



शंकु की तिरछी ऊंचाई $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{9 + 16}$

$l = \sqrt{25} = 5$ मीटर

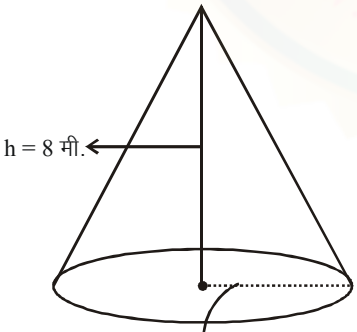
शंकु का तिरछा (वक्र) पृष्ठ $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 4 \times 5$

$= 62.85$ वर्ग मीटर ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 3. 8 मीटर ऊंचे तथा 12 मीटर व्यास के शंक्वाकार तंबू के निर्माण में कितनी चादर लगेगी?

हल : परंपरागत विधि



त्रिज्या $= \frac{\text{व्यास}}{2}$

$= \frac{12}{2} = 6$ मी.

शंक्वाकार तंबू की त्रिज्या $= \frac{\text{व्यास}}{2}$

$= \frac{12}{2} = 6$ मीटर

शंक्वाकार तंबू की तिरछी ऊंचाई $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$

$\therefore\ l = \sqrt{(8)^2 + (6)^2}$

$= \sqrt{64 + 36}$

$l = \sqrt{100} = 10$ मीटर

चादर = शंक्वाकार तंबू का तिरछा पृष्ठ $= \pi r l$

$= \pi \times 6 \times 10$

$= 60\pi$ वर्गमीटर

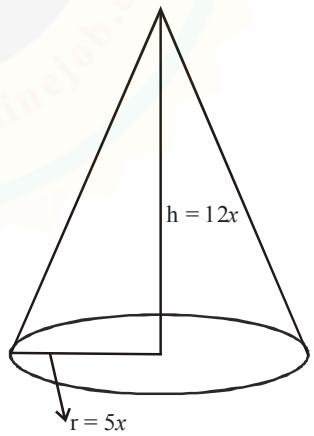
$= 60 \times \frac{22}{7} = 188.57$ वर्ग मीटर ⇒ **उत्तर**

$\left[\because \pi = \frac{22}{7} \text{ रखने पर}\right]$

प्रश्न 4. एक शंकु की त्रिज्या तथा ऊंचाई का अनुपात 5 : 12 है तथा इसका आयतन 2512 घन सेमी. है। शंकु की तिर्यक ऊंचाई, त्रिज्या तथा वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि

माना शंकु की त्रिज्या $5x$ सेमी. तथा ऊंचाई $12x$ सेमी. है।



शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$2512 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (5x)^2 \times (12x)$

$$2512 \times 21 = 22 \times 25x^2 \times 12x$$

$$x^3 = \frac{2512 \times 21}{22 \times 25 \times 12}$$

$$= 7.99$$

$x^3 = 8$ (माना लगभग में)

$x = 2$

इस प्रकार शंकु की त्रिज्या (r) = $5x$

r = 5 × 2 = 10 सेमी.

तथा शंकु की ऊंचाई = $12x$

h = 12 × 2 = 24 सेमी.

अतः शंकु की तिर्यक ऊंचाई (l) = $\sqrt{(h)^2 + (r)^2}$

$$l = \sqrt{(24)^2 + (10)^2}$$

$$l = \sqrt{576 + 100}$$

$l = \sqrt{676}$ = 26 सेमी.

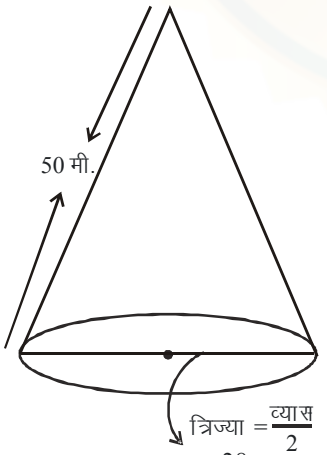
तथा शंकु का वक्र पृष्ठ = πrl

$$= \frac{22}{7} \times 10 \times 26$$

= 817.14 वर्ग मीटर ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 5. एक शंक्वाकार गुंबज का व्यास 28 मीटर तथा तिर्यक ऊंचाई 50 मीटर है। इसके वक्र पृष्ठ पर 80 पैसे प्रति वर्ग मीटर की दर से सफेदी कराने का खर्च क्या होगा?

हल : परंपरागत विधि



शंक्वाकार गुंबज की त्रिज्या = $\frac{\text{व्यास}}{2}$

$= \frac{28}{2} = 14$ मीटर

शंक्वाकार गुंबज का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = πrl

∴ वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\frac{22}{7} \times 14 \times 50$

= 44 × 50

= 2200 वर्ग मीटर

∵ 1 वर्ग मीटर सफेदी कराने का खर्च = 80 पैसा

∴ 2200 वर्ग मीटर सफेदी कराने का खर्च

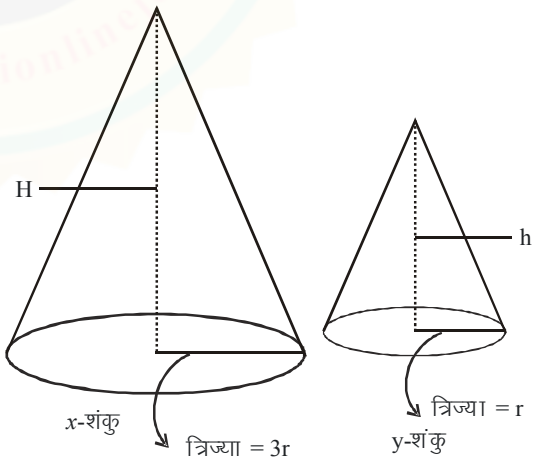
= 2200 × 80

= 176000 पैसा

= 1760 रु. ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 6. दो समवृत्ताकार शंकु x तथा y में x की त्रिज्या y की त्रिज्या से तीन गुनी है। y का आयतन x के आयतन का $\frac{1}{3}$ है। x तथा y की ऊंचाइयों में अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि



∵ x की त्रिज्या y की त्रिज्या की तीन गुनी है।

∴ माना y की त्रिज्या r तब x की त्रिज्या 3r होगी। पुनः माना x शंकु की ऊंचाई H तथा y शंकु की ऊंचाई h है।

∴ शंकु x का आयतन $= \frac{1}{3}\pi(3r)^2H$

$= \frac{1}{3}\pi \times 9r^2 \times H$

$= 3\pi r^2H$

तथा शंकु y का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2h$

∵ शंकु y का आयतन शंकु x के आयतन का $\frac{1}{3}$ है

∴ शंकु x का आयतन $\times \frac{1}{3}$ = शंकु y का आयतन

$3\pi r^2H \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2h$

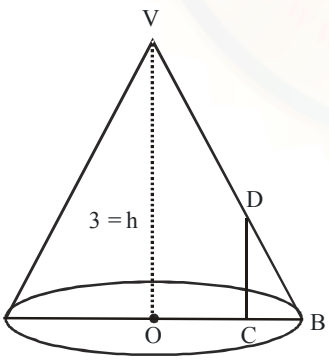
$H = \frac{1}{3} \times h$

$\frac{H}{h} = \frac{1}{3} = 1:3 \Rightarrow$ **उत्तर**

अतः शंकु x तथा शंकु y का आयतन 1 : 3 होगा।

प्रश्न 7. 3 मीटर ऊंचे एक ऐसे शंक्वाकार डेरे के लिए कितने वर्ग मीटर किरमिच की आवश्यकता होगी जिसमें 1.5 मीटर लंबा लड़का केंद्र से 2 मीटर की दूरी तक खड़ा हो सके?

हल : परंपरागत विधि



शंक्वाकार डेरे की त्रिज्या (OB)= r मीटर

OC वह अधिकतम दूरी है जहां तक लड़का खड़ा होने पर डेरे को स्पर्श कर सकता है, तो

CB = OB – OC

= r – 2

चित्र से ΔVOB तथा ΔDCB समरूप त्रिभुज है

$\therefore \frac{OV}{DC} = \frac{OB}{CB}$

$\therefore \frac{3}{1.5} = \frac{r}{r-2}$

$2 = \frac{r}{r-2}$

$2r - 4 = r$

$2r - r = 4$

r = 4 मीटर

अब डेरे की तिर्यक ऊंचाई $= \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

∴ डेरे में लगा किरमिच डेरे के वक्र पृष्ठ के बराबर होगा।

[illegible] $= \pi rl$

$= \pi \times 4 \times 5 = 20\pi$ वर्ग मीटर ⇒ **उत्तर**

अतः 20π वर्ग मीटर किरमिच की आवश्यकता पड़ेगी।

प्रश्न 8. एक शंक्वाकार तंबू के आधार की त्रिज्या 7 मीटर तथा ऊंचाई 24 मीटर है। इस तंबू को बनाने के लिए 1.25 मीटर चौड़े कितने कपड़े की आवश्यकता होगी?

हल : परंपरागत विधि

शंक्वाकार तंबू की तिरछी ऊंचाई (l)

$= \sqrt{(\text{त्रिज्या})^2 + (\text{ऊंचाई})^2}$

$= \sqrt{(7)^2 + (24)^2}$

$= \sqrt{49 + 576}$

$= \sqrt{625} = 25$ मीटर

कपड़े का क्षेत्रफल = शंक्वाकार तंबू का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25$

$= 22 \times 25 = 550$ वर्ग मीटर

अतः कपड़े की लंबाई = $\frac{\text{कपड़े का क्षेत्रफल}}{\text{कपड़े की चौड़ाई}}$

$= \frac{550}{1.25} = 440$ मीटर ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 9. दो शंकुओं में से एक का वक्र पृष्ठ दूसरे के वक्र पृष्ठ से दुगुना है तथा दूसरे शंकु की तिर्यक ऊंचाई पहले शंकु की तिर्यक ऊंचाई से दुगुनी है। दूसरे तथा पहले शंकु की त्रिज्याओं का अनुपात क्या होगा?

हल : परंपरागत विधि

माना पहले शंकु की तिर्यक ऊंचाई = l

तो दूसरे शंकु की तिर्यक ऊंचाई = $2 \times l = 2l$

माना दूसरे शंकु की त्रिज्या R तथा पहले शंकु की त्रिज्या r है।

पहले शंकु का वक्र पृष्ठ = 2 × (दूसरे शंकु का वक्र पृष्ठ)

$\therefore \pi r l = 2 \times (\pi \times R \times 2l)$

$\pi r l = 4\pi R l$

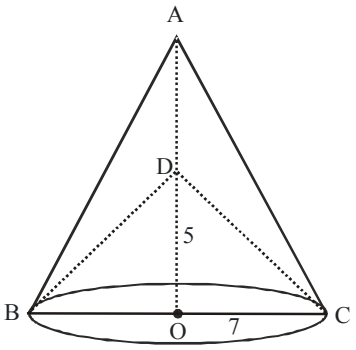
$r = 4R$

$\therefore \frac{R}{r} = \frac{1}{4} = 1 : 4$ ⇒ **उत्तर**

अतः दूसरे शंकु की त्रिज्या (R) पहले शंकु की त्रिज्या (r) = 1 : 4 होगा।

प्रश्न 10. किसी शंकु की ऊंचाई तथा त्रिज्या 10 सेमी. एवं 7 सेमी. है। उसमें से 5 सेमी. ऊंचे तथा 7 सेमी. त्रिज्या का एक शंकु काट लिया जाता है। शेष आकृति का आयतन पहले शंकु के आयतन का कितने प्रतिशत हो गया है?

हल : परंपरागत विधि



चित्रानुसार, शंकु ABC से शंकु BCD काट लिया जाता है।

शंकु ABC की ऊंचाई (AO) = 10 सेमी. तथा त्रिज्या (OC) = 7 सेमी.

$\therefore$ शंकु ABC का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 10$

$= \frac{1540}{3}$ घन सेमी.

काटे गए शंकु BCD की ऊंचाई (OD) = 5 सेमी.

तथा त्रिज्या (r) = 7 सेमी.

$\therefore$ काटे गए शंकु BCD का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 5$

$= \frac{770}{3}$ घन सेमी.

अब शेष बचे हुए आकृति का आयतन = शंकु ABC का आयतन – शंकु BCD का आयतन

$= \frac{1540}{3} - \frac{770}{3}$

$= \frac{1540 - 770}{3} = \frac{770}{3}$ घन सेमी.

माना शेष आकृति का आयतन = शंकु ABC के आयतन का $x\%$

$\frac{770}{3} = \frac{1540}{3} \times \frac{x}{100}$

$\frac{x}{100} = \frac{770}{1540}$

$x = \frac{770}{1540} \times 100 = 50\%$ ⇒ **उत्तर**

अतः शेष आकृति का आयतन पहले शंकु के आयतन का 50% है।

प्रश्न 11. एक शंकु की ऊंचाई 4 मीटर है। इस शंकु से 16 गुना आयतन तथा शंकु के व्यास के बराबर त्रिज्या वाले शंकु की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि

एक शंकु की ऊंचाई = 4 मीटर

माना शंकु की त्रिज्या r मीटर है।

$\therefore$ इस शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi r^2 \times 4 = \frac{4}{3}\pi r^2$

$\because$ दूसरे शंकु का आयतन पहले शंकु का 16 गुना है।

$\therefore$ दूसरे शंकु का आयतन $= 16 \times \frac{4}{3}\pi r^2 .....(i)$

दूसरे शंकु की त्रिज्या पहले शंकु के व्यास के बराबर है।

अर्थात दूसरे शंकु की त्रिज्या = पहले शंकु का व्यास

दूसरे शंकु की त्रिज्या = $2 \times r = 2r$

माना दूसरे शंकु की ऊंचाई H मीटर है।

$\therefore$ दूसरे शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \times \pi \times (2r)^2 \times H$

$= \frac{1}{3}\pi \times 4r^2 \times H$

दूसरे शंकु का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^2 H$

[समीकरण (i) से दूसरे शंकु का आयतन $= 16 \times \frac{4}{3}\pi r^2$ रखने पर]

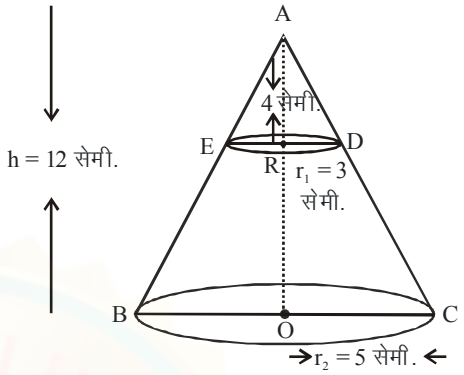
$16 \times \frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^2 H$

$\therefore$ H = 16 मीटर $\Rightarrow$ **उत्तर**

अतः दूसरे शंकु की ऊंचाई (H) = 16 मीटर

प्रश्न 12. 5 सेमी. त्रिज्या और 12 सेमी. ऊंचाई के शंकु का 4 सेमी. ऊपरी भाग काट दिया गया। काटा गया तल आधार के समांतर है। शेष आकृति का संपूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए जबकि काटे गए तल की त्रिज्या 3 सेमी. है।

हल : परंपरागत विधि



माना चित्रानुसार, शंकु ABC को तल DE से काटकर शंकु AED को अलग किया गया है।

शंकु ABC की ऊंचाई (OA) = 12 सेमी.

तथा त्रिज्या (OC) = 5 सेमी.

$\therefore$ शंकु ABC की तिरछी ऊंचाई (AB) $= \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$

$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169}$

= 13 सेमी.

इसी प्रकार शंकु AED की तिरछी ऊंचाई (AE)

$= \sqrt{(\text{ऊंचाई})^2 + (\text{त्रिज्या})^2}$

$= \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$

= 5 सेमी.

$\therefore$ छिन्नक BCDE की तिरछी ऊंचाई = AB − AE

= 13 − 5

= 8 सेमी.

$\therefore$ छिन्नक BCDE की वक्र पृष्ठ $= \pi(r_1 + r_2)l$

$= \pi \times (3 + 5) \times 8$

$= \pi \times 8 \times 8 = 64\pi$ वर्ग सेमी.

$\therefore$ दोनों सिरों का क्षेत्रफल $= \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= \pi \times (3)^2 + \pi \times (5)^2$

$= 9\pi + 25\pi$

$= 34\pi$ वर्ग सेमी.

∴ छिन्नक BCDE का संपूर्ण पृष्ठ = छिन्नक BCDE का वक्र पृष्ठ + दोनों सिरों का क्षेत्रफल

$= 64\pi + 34\pi$

$= 98\pi$

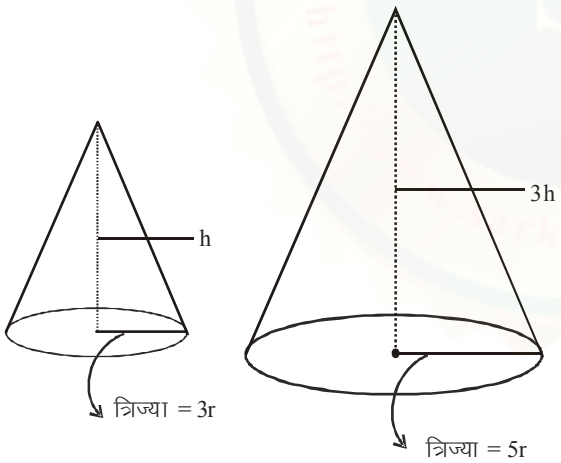
$= 98 \times \frac{22}{7} = 14 \times 22$

= 308 वर्ग सेमी. ⇒ **उत्तर**

अत: शेष आकृति अर्थात छिन्नक का संपूर्ण पृष्ठ 308 वर्ग सेमी. है।

प्रश्न 13. दो शंकुओं की ऊंचाइयों का अनुपात 1 : 3 है तथा उनके आधार के व्यास 3 : 5 के अनुपात में हैं। इनके आयतनों का अनुपात क्या होगा?

हल : परंपरागत विधि



माना दोनों शंकुओं की ऊंचाइयां क्रमश: h तथा 3h हैं और आधार की त्रिज्याएं क्रमश: 3r तथा 5r हैं। (जब दोनों शंकुओं के व्यास का अनुपात 3 : 5 है, तो उनकी त्रिज्याओं का भी अनुपात 3 : 5 होगा।)

अत: दोनों शंकुओं के आयतन का अनुपात

$$= \frac{\frac{1}{3}\pi(3r)^2 h}{\frac{1}{3}\pi(5r)^2 \times 3h}$$

$$= \frac{9r^2}{25r^2 \times 3}$$

$$= \frac{3}{25} = 3:25 \Rightarrow$$ **उत्तर**

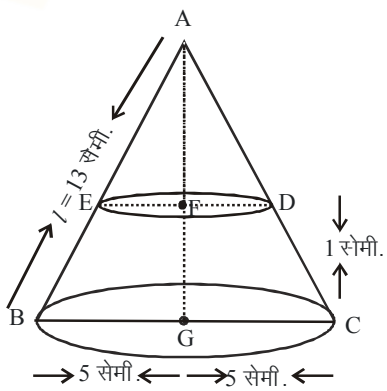
अनुपात विधि

	I		II
व्यास/त्रिज्या का अनुपात→	3	:	5
(व्यास/(त्रिज्या)^2 का अनुपात→	9	:	25
	×		×
ऊंचाई का अनुपात →	1	:	3
3 × आयतन का अनुपात →	9	:	75
आयतन का अनुपात→	3	:	25

⇒ **उत्तर**

प्रश्न 14. एक ठोस लंबवृत्तीय शंकु का व्यास 10 सेमी. तथा तिर्यक ऊंचाई 13 सेमी. है। आधार से 1 सेमी. ऊपर से एक समतल द्वारा इसे काटा जाता है जो आधार के समांतर है। इस प्रकार बने छिन्नक का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि



माना चित्रानुसार, शंकु ABC का व्यास 10 सेमी. तथा तिर्यक ऊंचाई 13 सेमी. है। शंकु को DE समतल द्वारा काटा गया है। FG = 1 सेमी.

शंकु ABC में तिर्यक ऊंचाई $= \sqrt{(\text{त्रिज्या})^2 + (\text{ऊंचाई})^2}$

$$13 = \sqrt{(BG)^2 + (AG)^2}$$

$$13^2 = (5)^2 + (AG)^2$$

$$(AG)^2 = (13)^2 - (5)^2$$

$$AG = \sqrt{169 - 25}$$

$$AG = \sqrt{144} = 12 \text{ सेमी.}$$

इस प्रकार शंकु ABC की ऊंचाई (AG) = 12 सेमी. है।

$\therefore$ AF = AG – FG

शंकु AED की ऊंचाई (AF) = 12 – 1 = 11 सेमी.

ΔAFD तथा ΔAGC समरूप त्रिभुज हैं।

$$\therefore \frac{AF}{AG} = \frac{FD}{GC}$$

$$\frac{11}{12} = \frac{FD}{5}$$

$$FD = \frac{11 \times 5}{12} = \frac{55}{12}$$

जो शंकु AED की त्रिज्या है।

इस प्रकार शंकु AED का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3}\pi \times \frac{55}{12} \times \frac{55}{12} \times 11$$

$$= \frac{33275}{432}\pi$$

$$= 77.03\pi$$

शंकु ABC का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3}\pi \times 5 \times 5 \times 12$$

$$= 100\pi$$

$\therefore$ छिन्नक BCDE का आयतन = शंकु ABC का आयतन – शंकु AED का आयतन

$= (100\pi - 77.03\pi)$ घन सेमी.

$= 23\pi$ घन सेमी. (लगभग) $\Rightarrow$ **उत्तर**

अभ्यास प्रश्न

1. यदि किसी शंकु के आधार का क्षेत्रफल 770 वर्ग सेमी. तथा उसके वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल 814 वर्ग सेमी. हो, तो शंकु का आयतन कितना होगा?

2. यदि 24 सेमी. ऊंचाई वाले एक लंबवृत्तीय शंकु का आयतन 1232 घन सेमी. है, तो उसका वक्र-पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. किसी शंकु की ऊंचाई उसके आधार की त्रिज्या r की दुगुनी है। शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

4. एक शंकु एक घन के अंदर इस प्रकार पूरी तरह से फिट हो जाता है कि शंकु का आधार घन के किसी एक सतह को स्पर्श करता है तथा उसका शीर्ष घन के सम्मुख सतह को। यदि घन का आयतन 343 घन सेमी. हो, तो शंकु का आयतन (लगभग) ज्ञात करें।

5. एक शंकु की ऊंचाई तथा उसके आधार के अर्द्धव्यास दोनों में 100% की वृद्धि की जाती है। शंकु के आयतन में वृद्धि का प्रतिशत कितना होगा?

6. यदि दो शंकुओं के आयतनों का अनुपात 2 : 3 है और उनके आधार की त्रिज्याओं का अनुपात 1 : 2 हो, तो उनकी ऊंचाइयों का अनुपात क्या होगा?

7. यदि S एक ऊंचाई h तथा अर्द्ध शीर्ष कोण α वाले लंबवृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल निरूपित करता है, तो S का मान ज्ञात कीजिए।

8. किसी शंकु की ऊंचाई 30 सेमी. है। शंकु के आधार के समांतर एक समतल द्वारा शंकु के ऊपरी भाग से एक छोटा शंकु काटा गया है। यदि इसका आयतन शंकु के आयतन का $\frac{1}{27}$ हो, तो आधार से कितनी ऊंचाई पर शंकु को काटा गया है?

9. यदि किसी शंकु के आधार का अर्द्धव्यास दुगुना कर दिया जाए, और उसकी ऊंचाई में कोई परिवर्तन न किया जाए, तो नए शंकु के आयतन का प्रारंभिक शंकु के आयतन से क्या अनुपात होगा?

10. एक लंबवृत्तीय शंकु की ऊंचाई 3.6 सेमी. और उसके आधार की त्रिज्या 1.6 सेमी. है। उसको पिघलाकर उसे 1.2 सेमी. आधार की त्रिज्या वाले लंब-वृत्तीय शंकु में ढाला गया है। तदनुसार उस नए शंकु की ऊंचाई कितने सेमी. होगी?

11. यदि एक लंबवृत्तीय शंकु की ऊंचाई, वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल तथा आयतन क्रमशः h, c तथा v हो, तो $3\pi vh^3 - c^2h^2 + 9v^2$ का मान कितना होगा?

12. एक लंबवृत्तीय शंकु के आधार का परिमाप 8 सेमी. है। यदि उस शंकु की ऊंचाई 21 सेमी. हो तो उसका आयतन कितना होगा?

13. एक शांकव तंबु का आयतन 1232 घन सेमी. है और उसके आधार का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी. है। उस तंबू को बनाने के लिए आवश्यक कैनवास की लंबाई ज्ञात कीजिए, यदि उपलब्ध कैनवास केवल 2 मीटर चौड़ा हो।

14. किसी धातु के एक ठोस बेलन के आधार का अर्द्धव्यास तथा उसकी ऊंचाई क्रमशः r सेमी. तथा 6 सेमी. है। इसे पिघलाकर उतने ही आधार के अर्द्धव्यास वाला एक ठोस शंकु बनाया जाता है। शंकु की ऊंचाई क्या होगी?

15. एक बेलन की ऊंचाई तथा एक शंकु की ऊंचाई 2 : 3 तथा उनके आधार के अर्द्धव्यास 3 : 4 के अनुपात में हैं। उनके आयतनों का अनुपात क्या होगा?

16. एक शंक्वाकार तंबू के आधार की त्रिज्या 16 मीटर है। यदि तंबू को बनाने में $427\frac{3}{7}$ वर्ग मीटर कैनवास की आवश्यकता पड़ी हो, तो उस तंबू की तिरछी ऊंचाई कितनी रही होगी?

अभ्यास प्रश्नों का हल

हल 1. परंपरागत विधि

चूंकि शंकु का आधार हमेशा वृत्त होता है, इसलिए शंकु के आधार अर्थात वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

$\therefore \pi r^2 = 770$

$r^2 = \frac{770}{\pi}$

$= \frac{770}{\frac{22}{7}} = \frac{770 \times 7}{22}$

$r = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$ सेमी.

$\therefore \pi r^2 = 770$

पुनः शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\pi r l = 814$

$\frac{22}{7} \times 7\sqrt{5} \times l = 814$

$l = \frac{814}{22\sqrt{5}}$

$l = \frac{37}{\sqrt{5}}$ सेमी.

इस प्रकार शंकु की ऊंचाई $h = \sqrt{(l)^2 - (r)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{37}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(7\sqrt{5}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{37 \times 37}{5} - 49 \times 5}$

$= \sqrt{\frac{1369 - 1225}{5}}$

$= \sqrt{\frac{144}{5}}$

$h = \frac{12}{\sqrt{5}}$ सेमी.

अतः शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi \times (r)^2 \times h$

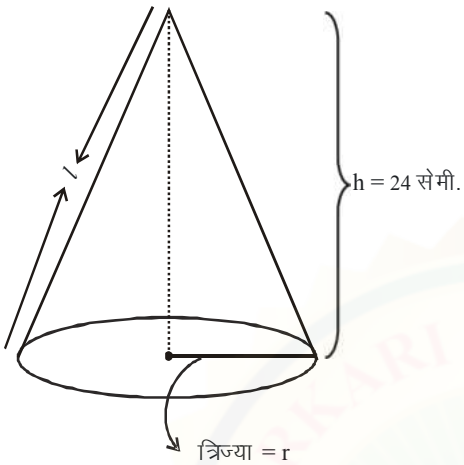
$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(7\sqrt{5}\right)^2 \times \frac{12}{\sqrt{5}}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{5} \times 7\sqrt{5} \times \frac{12}{\sqrt{5}}$

$= 88 \times 7\sqrt{5}$ सेमी.

अतः शंकु का आयतन = $616\sqrt{5}$ घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

हल 2. परंपरागत विधि



शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

ज्ञात है, शंकु का आयतन = 1232 घन सेमी.

ऊंचाई (h) = 24 सेमी.

$\because$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$1232 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (r)^2 \times 24$$

$$r^2 = \frac{1232 \times 21}{22 \times 24}$$

$$= \frac{56 \times 21}{24} = 49$$

$$r = \sqrt{49} = 7 \text{ सेमी.}$$

$\therefore$ तिर्यक ऊंचाई $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$

$$= \sqrt{(24)^2 + (7)^2}$$

$$= \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625}$$

$$l = 25 \text{ सेमी.}$$

$\therefore$ शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25$$

$= 22 \times 25 = 550$ वर्ग सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

हल 3. सूत्र विधि

शंकु की ऊंचाई = 2 × शंकु की त्रिज्या

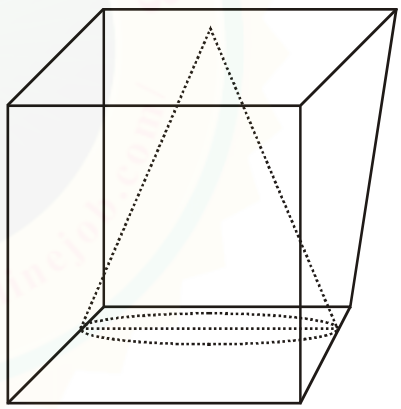
$h = 2r$

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi (r)^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi (r)^2 \times 2r$ **($\because$ h = 2r रखने पर)**

$= \frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow$ **उत्तर**

हल 4. परंपरागत विधि



घन का किनारा = $\sqrt[3]{\text{घन का आय तन}}$

$= \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7 \times 7 \times 7}$

= 7 सेमी.

चूंकि घन की प्रत्येक भुजा बराबर होती है, इसलिए शंकु की ऊंचाई = 7 सेमी. तथा शंकु की त्रिज्या $= \frac{7}{2} = 3.5$ सेमी. होगी।

अत: शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 7$

= 89.83 घन सेमी.

= 90 घन सेमी. (लगभग)

⇒ **उत्तर**

सामान्य समझ पर

यदि एक शंकु एक घन के अंदर इस प्रकार फिट हो जाता है कि शंकु के आधार का किनारा घन के किसी एक सतह के किनारों को स्पर्श करता है तथा शंकु का शीर्ष घन के दूसरे विपरीत सतह को स्पर्श करता हो, तो शंकु का आयतन $= \frac{\pi}{12} \times$ घन का आयतन होगा।

अत: उपर्युक्त प्रश्न में शंकु का आयतन $= \frac{\pi}{12} \times 343$

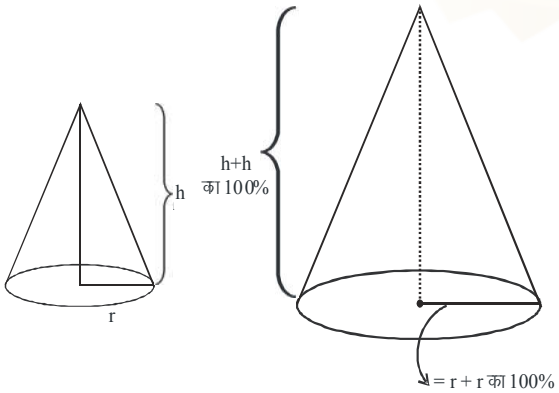
$= \frac{22}{7 \times 12} \times 343$

$= \frac{11 \times 49}{6}$

= 89.83 घन सेमी.

≈ 90 घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

हल 5. परंपरागत विधि



शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

यदि शंकु की त्रिज्या एवं ऊंचाई 100% बढ़ाई जाए, तो

नए शंकु की त्रिज्या = r + r का 100% = 2r

तथा ऊंचाई = h + h का 100% = 2h

∴ नए शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi(2r)^2 2h$

$= \frac{1}{3}\pi \times 4r^2 \times 2h$

$= \frac{8}{3}\pi r^2 h$

नए शंकु के आयतन में वृद्धि $= \frac{8}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= 7\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$

अत: प्रतिशत वृद्धि $= \frac{\text{शंकु के आयतन में वृद्धि}}{\text{पुराने शंकु के आयतन}} \times 100$

$= \frac{7\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)}{\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)} \times 100$

= 7 × 100 = 700% ⇒ **उत्तर**

गुणा-भाग विधि

शंकु की त्रिज्या एवं ऊंचाई में 100% वृद्धि का अर्थ है कि नए शंकु की त्रिज्या एवं ऊंचाई पुराने शंकु की त्रिज्या एवं ऊंचाई की दुगुनी होगी।

	त्रिज्या	× त्रिज्या	× ऊंचाई	= आयतन
	↓	↓	↓	↓
पुराने शंकु का आयतन →	10	× 10	× 10	= 1000
नए शंकु का आयतन →	20	× 20	× 20	= 8000

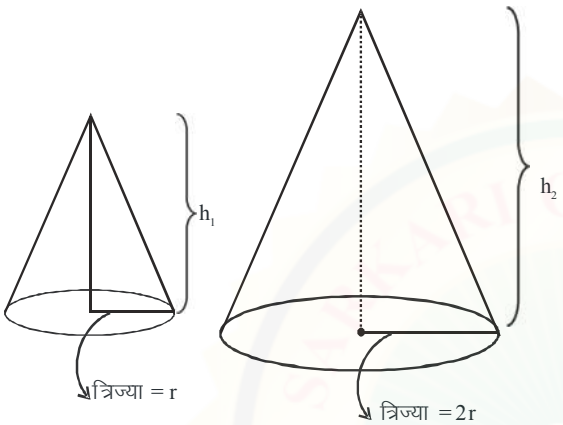
नए शंकु के आयतन में वृद्धि = 8000 – 1000

= 7000 घन इकाई

$\therefore$ नए शंकु के आयतन में प्रतिशत वृद्धि $= \frac{7000}{1000} \times 100$

$= 700\% \Rightarrow$ **उत्तर**

हल 6. सूत्र विधि



माना दोनों शंकुओं की त्रिज्याएं r एवं 2r है तथा उनकी ऊंचाइयां h_1 एवं h_2 हैं।

शंकु के आयतनों में अनुपात $= \frac{2}{3}$

$$\frac{\text{पहले शंकु का आयतन}}{\text{दूसरे शंकु का आयतन}} = \frac{2}{3}$$

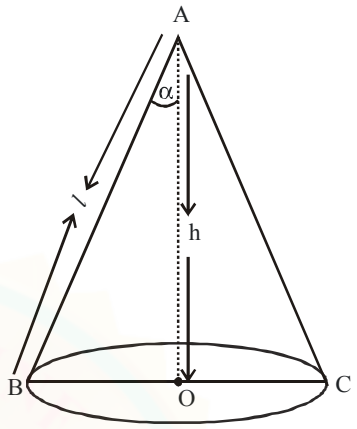
$$\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi (2r)^2 h_2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{r^2 h_1}{4r^2 h_2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$$

अतः $h_1 : h_2 = 8 : 3 \Rightarrow$ **उत्तर**

हल 7. परंपरागत विधि



माना शंकु की तिर्यक ऊंचाई l है।

समकोण Δ ABO में

$$\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \cos\alpha$$

$$\frac{h}{l} = \cos\alpha$$

[यहां आधार = शंकु की ऊंचाई = h तथा कर्ण = शंकु की तिर्यक ऊंचाई = l है]

$$l = \frac{h}{\cos\alpha} \text{ ..... (i)}$$

पुनः समकोण Δ ABO में

$$\tan\alpha = \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \frac{\text{शंकु की त्रिज्या}}{\text{शंकु की ऊंचाई}}$$

$$\tan\alpha = \frac{r}{h}$$

$$r = h \times \tan\alpha \text{ ..... (ii)}$$

शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi r l$

$$S = \pi \times h\tan\alpha \times \frac{h}{\cos\alpha}$$

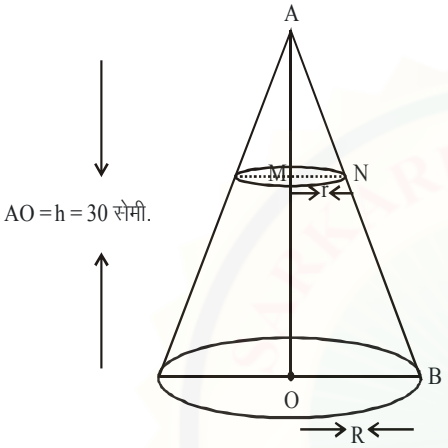
[समीकरण (i) एवं (ii) से l तथा r का मान रखने पर]

$= \pi \times h^2 \times \tan\alpha . \sec\alpha$

$[\therefore \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha]$

अत: लंबवृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (S) = $\pi h^2 \times \tan\alpha.\sec\alpha$ होगा। ⇒ **उत्तर**

हल 8. परंपरागत विधि



ज्ञात करना है

OM = ?

बड़े शंकु की ऊंचाई (AO) 30 सेमी. एवं त्रिज्या (OB) R तथा छोटे शंकु की त्रिज्या (MN) r सेमी. और छोटे शंकु की ऊंचाई (AM) = h है।

उपर्युक्त चित्र में Δ AOB तथा ΔAMN समरूप हैं।

$$\therefore \frac{AO}{AM} = \frac{BO}{MN}$$

$$\frac{30}{h} = \frac{R}{r} \text{ .....(i)}$$

छोटे शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

बड़े शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi R^2 H$

बड़े शंकु का आयतन = 27 × (छोटे शंकु का आयतन)

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H = 27 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{27h}{H}$$

$$\left(\frac{30}{h}\right)^2 = \frac{27h}{H}$$

[समीकरण (i) से $\frac{R}{r} = \frac{30}{h}$ तथा H = AO = 30 रखने पर]

$$\frac{900}{h^2} = \frac{27h}{30}$$

$$27h \times h^2 = 900 \times 30$$

$$h^3 = \frac{27000}{27}$$

$$h = \sqrt[3]{1000}$$

h = 10 सेमी.

इस प्रकार छोटे शंकु की ऊंचाई (h) = 10 सेमी. है।

अत: आधार से काटे गए छोटे शंकु की ऊंचाई

= AO – AM

= H – h

= 30 – 10

= 20 सेमी. ⇒ **उत्तर**

हल 9. परंपरागत विधि

माना पुराने शंकु की त्रिज्या r तथा ऊंचाई h हो, तो नए शंकु का अर्द्धव्यास या त्रिज्या = पुराने शंकु की त्रिज्या × 2

= r × 2 = 2r

नए शंकु की ऊंचाई = पुराने शंकु की ऊंचाई है।

[क्योंकि शंकु की ऊंचाई में कोई परिवर्तन नहीं है]

इस प्रकार नए शंकु के आयतन एवं पुराने शंकु के आयतन का अनुपात = $\frac{\text{नए शंकु का आयतन}}{\text{पुराने शंकु का आयतन}}$

$$= \frac{\frac{1}{3}\pi(2r)^2 h}{\frac{1}{3}\pi(r)^2 h}$$

$$= \frac{4r^2}{r^2} = \frac{4}{1} \text{ या } 4:1 \Rightarrow$$ **उत्तर**

अतः नए शंकु एवं प्रारंभिक शंकु के आयतन का अनुपात 4 : 1 होगा।

हल 10. परंपरागत विधि

प्रारंभिक शंकु का आयतन = नए शंकु का आयतन होगा

(क्योंकि प्रारंभिक शंकु को पिघलाकर एक नया शंकु बनाया गया)

माना नए शंकु की ऊंचाई = h

ज्ञात है-प्रारंभिक शंकु की ऊंचाई = 3.6 सेमी., त्रिज्या = 1.6 सेमी. तथा नए शंकु की त्रिज्या = 1.2 सेमी.

इस प्रकार

प्रारंभिक शंकु का आयतन = नए शंकु का आयतन

$$\frac{1}{3}\pi \times (1.6)^2 \times 3.6 = \frac{1}{3}\pi \times (1.2)^2 \times h$$

$$h = \frac{1.6 \times 1.6 \times 3.6}{1.2 \times 1.2}$$

$$= \frac{1.6 \times 1.6 \times 3}{1.2}$$

$$= 1.6 \times 4 = 6.4 \text{ सेमी.}$$

अतः नए शंकु की ऊंचाई 6.4 सेमी. है। $\Rightarrow$ **उत्तर**

हल 11. परंपरागत विधि

लंबवृत्तीय शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

(जहां r आधार की त्रिज्या तथा h ऊंचाई है)

या $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .....(i)

शंकु का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\pi r l$

(जहां *l* शंकु की तिरछी ऊंचाई है)

$c = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

[शंकु की तिरछी ऊंचाई

$$(l) = \sqrt{(\text{त्रिज्या})^2 + (\text{ऊंचाई})^2} = \sqrt{r^2 + h^2}\,]$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$c^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2)$

$c^2 = \pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 h^2$ .....(ii)

$$\therefore\ 3\pi v h^3 - c^2h^2 + 9v^2 = 3\pi h^3 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h - c^2h^2 + 9 \times \frac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2$$

[समीकरण (i) से v का मान रखने पर]

$= \pi^2 r^2 h^4 - (\pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 h^2)\, h^2 + \pi^2 r^4 h^2$

[समीकरण (ii) में c^2 का मान रखने पर]

$= \pi^2 r^2 h^4 - \pi^2 r^4 h^2 - \pi^2 r^2 h^4 + \pi^2 r^4 h^2$

$= 0$

अतः $3\pi v h^3 - c^2h^2 + 9v^2 = 0$ होगा। $\Rightarrow$ **उत्तर**

हल 12. परंपरागत विधि

लंबवृत्तीय शंकु के आधार का परिमाप = 8 सेमी.

माना शंकु की त्रिज्या r है।

$\therefore\ 2\pi r = 8$

$$r = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$$

अब लंबवृत्तीय शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

[$r = \frac{4}{\pi}$ तथा h = 21 रखने पर]

$$= \frac{1}{3}\pi \times \frac{16^2}{\pi^2} \times 21$$

$$= \frac{16 \times 7}{\pi}$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \times 21$$

$$= \frac{112}{\pi} \text{ सेमी.}^3 \Rightarrow$$ **उत्तर**

हल 13. परंपरागत विधि

शंकु के आधार का क्षेत्रफल = πr^2

$154 = \pi r^2$

$\therefore r^2 = \frac{154 \times 7}{22}$

$r^2 = 7 \times 7$

$\therefore r = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$1232 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 \times h$

$h = \frac{1232 \times 3 \times 7}{22 \times 7 \times 7}$

h = 24 मीटर

$\therefore$ शंकु की तिरछी ऊंचाई $(l) = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{7^2 + (24)^2}$

$= \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625}$

= 25 मीटर

तंबू को बनाने के लिए आवश्यक कैनवास = तंबू के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550$ वर्ग मीटर

तंबू का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

550 = लंबाई × 2

लंबाई = $\frac{550}{2}$ = 275 मी.

अतः कैनवास की लंबाई 275 मीटर है। ⇒ **उत्तर**

हल 14. सूत्र विधि

माना शंकु की ऊंचाई h है तथा बेलन की ऊंचाई h_1 = 6 सेमी. है।

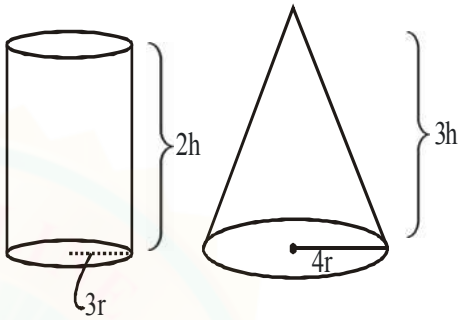
स्पष्ट है शंकु का आयतन = बेलन का आयतन होगा

$\therefore \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi r^2 h_1$

$\frac{1}{3} h = 6$ ($\because$ बेलन की ऊंचाई $h_1 = 6$ सेमी.)

h = 6 × 3 = 18 सेमी. ⇒ **उत्तर**

हल 15. परंपरागत विधि



माना बेलन की ऊंचाई 2h एवं त्रिज्या 3r तथा शंकु की ऊंचाई 3h एवं त्रिज्या 4r है।

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$= \pi(3r)^2(2h)$

$= \pi \times 9r^2 \times 2h$

$= 18\pi r^2 h$

तथा शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi(4r)^2 3h$

$= 16\pi r^2 h$

अतः बेलन एवं शंकु के आयतनों का अनुपात

$= \frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{शंकु का आयतन}}$

$= \frac{18\pi r^2 h}{16\pi r^2 h}$

$= \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$

= 9 : 8 ⇒ **उत्तर**

हल 16. परंपरागत विधि

शंक्वाकार तंबू को बनाने में $427\frac{3}{7}$ वर्ग मीटर कैनवास की आवश्यकता है अर्थात तंबू के वक्र-पृष्ठ का क्षेत्रफल $427\frac{3}{7}$ वर्ग मीटर है।

शंक्वाकार तंबू का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल = $\pi r l$

$$427\frac{3}{7} = \frac{22}{7} \times 16 \times l$$

(जहां l = तिरछी ऊंचाई तथा r = 16 मीटर है)

$$\frac{2992}{7} = \frac{22}{7} \times 16 \times l$$

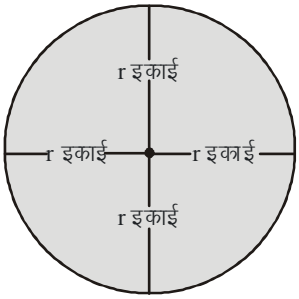
$$l = \frac{2992}{7} \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{16}$$

$$l = \frac{2992}{22 \times 16} = 8.5 \text{ मीटर}$$

अतः तंबू की तिरछी ऊंचाई = 8.5 मीटर है। ⇒ **उत्तर**

गोला (Sphere)

अंतरिक्ष में एक निश्चित बिंदु से समदूरस्थ समस्त बिंदुओं से प्राप्त वक्रपृष्ठ से सीमाबद्ध आकृति गोला कहलाती है अर्थात ऐसी सतह से घिरी आकृति जिसमें सतह का प्रत्येक बिंदु एक स्थिर बिंदु से समान दूरी पर हो, गोला कहलाती है। प्रत्येक गोले का एक केंद्र होता है, केंद्र को पृष्ठ के किसी बिंदु से मिलाने वाली रेखा त्रिज्या कहलाती है। गोले की त्रिज्या का संकेत r होता है।



(a) गोले का आयतन = $\frac{4\pi}{3}$ (त्रिज्या)^3

$$V = \frac{4\pi}{3}(r)^3$$

(b) गोले का वक्रपृष्ठ = संपूर्ण पृष्ठ

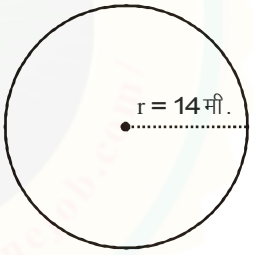
= 4π (त्रिज्या)^2

$$S = 4\pi r^2$$

☞ **गोला पर एक सरल प्रश्न देखें-**

प्रश्न- एक गोले का अर्द्धव्यास (त्रिज्या) 14 मीटर है। उसका आयतन तथा सतह या संपूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि



गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14$$

= 11498.666 घन मीटर (लगभग)

⇒ **उत्तर**

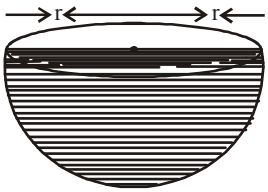
गोले का संपूर्ण पृष्ठ = $4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$

= 2464 वर्ग मीटर ⇒ **उत्तर**

➲ **अर्द्ध गोला (Hemisphere)**

गोला के अर्द्धक को अर्द्ध गोला या गोलार्द्ध कहते हैं।



यदि अर्द्ध गोले (गोलार्द्ध) की त्रिज्या 'r' इकाई हो, तो

गोलार्द्ध का आयतन = $\frac{2}{3}\pi$ (त्रिज्या)^3

$= \frac{2}{3}\pi r^3$ घन इकाई

गोलार्द्ध का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल = 3π (त्रिज्या)^2

$= 3\pi r^2$ वर्ग इकाई

☞ **गोलार्द्ध पर एक सरल प्रश्न देखें-**

प्रश्न : एक अर्द्ध गोलाकार मेज की त्रिज्या 21 सेमी. है, तो अर्द्ध गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : अर्द्ध गोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi$ (त्रिज्या)^3

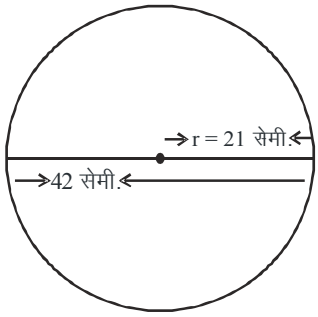
$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 21\times 21\times 21$

= 19404 घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

गोला तथा गोलार्द्ध पर उदाहरणार्थ प्रश्न

प्रश्न 1. 42 सेमी. व्यास वाले गोले का आयतन एवं पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि



गोले का व्यास = 42 सेमी.

∴ गोले की त्रिज्या = $\frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{42}{2}$ = 21 सेमी.

गोले का आयतन = $\frac{4\pi}{3}$ (त्रिज्या)^3

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(21)^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 21\times 21\times 21$

= 38808 घन सेमी.

गोले का वक्रपृष्ठ = संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल

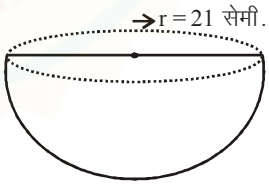
= 4π (त्रिज्या)^2

$= 4\times\frac{22}{7}\times 21\times 21$

= 5544 वर्ग सेमी. ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 2. 21 सेमी. त्रिज्या वाले किसी गोलार्द्ध का आयतन उसके वक्र सतह का क्षेत्रफल एवं कुल पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि



गोलार्द्ध की त्रिज्या (r) = 21 सेमी.

गोलार्द्ध का आयतन = $\frac{2}{3}\pi(r)^3$

$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 21\times 21\times 21$

= 19404 घन सेमी.

गोलार्द्ध के वक्र सतह का क्षेत्रफल = $2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

= 2772 वर्ग सेमी.

गोलार्द्ध के कुल पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

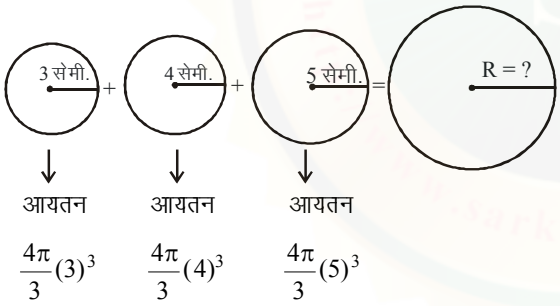
$= 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

= 4158 वर्ग सेमी.

⇒ **उत्तर**

प्रश्न 3. धातु की तीन ठोस गेंदें जिनकी त्रिज्याएं 3 सेमी., 4 सेमी. और 5 सेमी. हैं, को पिघलाकर एक अन्य ठोस गेंद बनाई जाती है। इस नई गेंद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि



3 सेमी. त्रिज्या वाले गोले का आयतन = $\frac{4\pi}{3}(3)^3$

4 सेमी. त्रिज्या वाले गोले का आयतन = $\frac{4\pi}{3}(4)^3$

तथा 5 सेमी. त्रिज्या वाले गोले का आयतन = $\frac{4\pi}{3}(5)^3$

माना नई गेंद की त्रिज्या R सेमी. है

∴ नई गेंद का आयतन = $\frac{4}{3}\pi R^3$

नई गेंद का आयतन = तीनों गोलों के आयतन का योग

$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(3)^3 + \frac{4}{3}\pi(4)^3 + \frac{4}{3}\pi(5)^3$

$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left[(3)^3 + (4)^3 + (5)^3\right]$

$R^3 = [27 + 64 + 125]$

$R^3 = 216 = 6 \times 6 \times 6$

R = 6 सेमी.

अतः नए गेंद की त्रिज्या 6 सेमी. है। ⇒ **उत्तर**

सामान्य समझ पर

माना नई गेंद की त्रिज्या R है,

सभी गोले हैं अतः

$R^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$

$R^3 = 27 + 64 + 125$

$R^3 = 216$

$R = \sqrt[3]{216} = 6$ ⇒ **उत्तर**

Example 4. किसी गोले के पृष्ठ का क्षेत्रफल 616 वर्ग सेमी. है। इस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि

गोले के पृष्ठ का क्षेत्रफल = 4π (त्रिज्या)^2

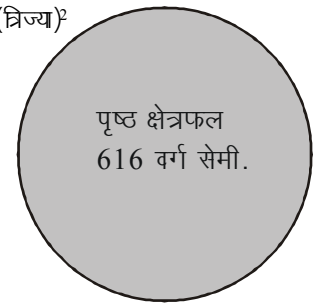
$616 = 4 \times \pi \times$ (त्रिज्या)^2

∴ (त्रिज्या)$^2 = \frac{616}{4 \times \pi}$

∴ (त्रिज्या)$^2 = \frac{616}{4 \times \frac{22}{7}}$

(त्रिज्या)$^2 = 7 \times 7$

∴ त्रिज्या = 7 सेमी.



गोले का आयतन = $\frac{4\pi}{3}$(त्रिज्या)^3

(त्रिज्या = 7 रखने पर)

$$= \frac{4}{3}\pi \times 7 \times 7 \times 7$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$$

$$= \frac{4312}{3} \text{ घन सेमी.} \Rightarrow \textbf{उत्तर}$$

$$= 1437.33 \text{ घन सेमी.}$$

प्रश्न 5. एक गोले का आयतन 4851 घन सेमी. है। इसके वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल कितना है?

हल : परंपरागत विधि

गोले का आयतन = 4851

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4851$$

$$r^3 = 4851 \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{22}$$

$$r^3 = \left(\frac{21}{2}\right)^3$$

$$r = \frac{21}{2}$$

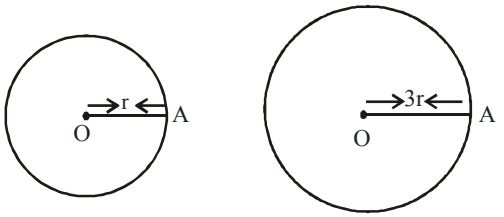
$\therefore$ गोले के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$$

$$= 1386 \text{ वर्ग सेमी.} \Rightarrow \textbf{उत्तर}$$

प्रश्न 6. एक गोले की त्रिज्या तिगुनी कर देने पर पृष्ठ के क्षेत्रफल में कितनी प्रतिशत वृद्धि होगी?

हल : परंपरागत विधि



माना गोले की त्रिज्या r इकाई है, तो दूसरे गोले की त्रिज्या 3r इकाई होगी।

पुराने गोले के पृष्ठ का क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

तथा नए गोले के पृष्ठ का क्षेत्रफल = $4\pi(3r)^2$

$= 36\pi r^2$

गोले के पृष्ठ क्षेत्रफल में वृद्धि = $36\pi r^2 - 4\pi r^2$

$= 32\pi r^2$

$\therefore$ गोले के पृष्ठ क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि

$$= \left(\frac{32\pi r^2}{4\pi r^2} \times 100\right)\%$$

$$= 800\% \Rightarrow \textbf{उत्तर}$$

गुणा-भाग विधि

	त्रिज्या	×	त्रिज्या	=	आयतन
	↓		↓		↓
पूर्व में →	10	×	10	=	100
वर्तमान में →	30	×	30	=	900

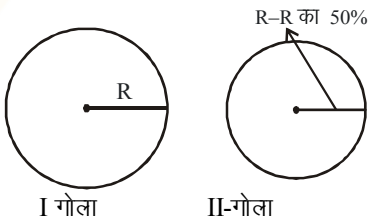
वृद्धि = 900 – 100 = 800 वर्ग इकाई

$\because$ प्रतिशत वृद्धि = $\frac{800}{100} \times 100 = 800\% \Rightarrow$ **उत्तर**

नोट- प्रतिशत अध्याय में इस विधि का विस्तृत उल्लेख है।

प्रश्न 7. एक गोले की त्रिज्या में 50% कमी कर देने पर इसके पृष्ठ के क्षेत्रफल में कितनी कमी होगी?

हल : परंपरागत विधि



माना गोले की त्रिज्या R इकाई,

तब गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल = $4\pi R^2$

अब नए गोले की त्रिज्या = (R – R का 50%)

$$= R - \frac{R \times 50}{100} = R - \frac{R}{2}$$

$$= \frac{R}{2} \text{ इकाई}$$

नए गोले के पृष्ठ का क्षेत्रफल = 4π (त्रिज्या)^2

$$= 4\pi \times \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$= 4\pi \times \frac{R^2}{4}$$

$$= \pi R^2$$

इस प्रकार गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल में कमी

$$= 4\pi R^2 - \pi R^2$$

$$= 3\pi R^2$$

$$\therefore \text{ प्रतिशत कमी} = \left(\frac{3\pi R^2}{4\pi R^2} \times 100\right)\%$$

$= 75\% \Rightarrow$ **उत्तर**

गुणा-भाग विधि

	त्रिज्या	×	त्रिज्या	=	क्षेत्रफल
	↓		↓		↓
पूर्व में →	10	×	10	=	100
वर्तमान में →	5	×	5	=	25

प्रतिशत कमी = 100 – 25

$= 75\% \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 8. एक अर्द्ध गोले का आयतन 19404 घन सेमी. है। इसकी त्रिज्या क्या है?

हल : सूत्र विधि

अर्द्ध गोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi \times$ (त्रिज्या)^3

$$\therefore 19404 = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (\text{त्रिज्या})^3$$

$$(\text{त्रिज्या})^3 = 19404 \times \frac{3}{2} \times \frac{7}{22}$$

$$(\text{त्रिज्या})^3 = 9261$$

$$(\text{त्रिज्या})^3 = (21)^3$$

$\therefore$ त्रिज्या = 21 सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

अत: अर्द्ध-गोले की त्रिज्या = 21 सेमी. है।

प्रश्न 9. एक अर्द्ध गोले का आयतन 155232 घन सेमी. है। इसके संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल क्या होगा?

हल : अर्द्ध गोले का आयतन = 155232

$$\therefore \frac{2}{3}\pi (\text{त्रिज्या})^3 = 155232$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{22}{7} (\text{त्रिज्या})^3 = 155232$$

$$(\text{त्रिज्या})^3 = \frac{155232 \times 3 \times 7}{2 \times 22} = 3528 \times 21$$

$$(\text{त्रिज्या})^3 = 74088 = (42)^3$$

$\therefore$ त्रिज्या = 42

अत: अर्द्ध गोले का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल

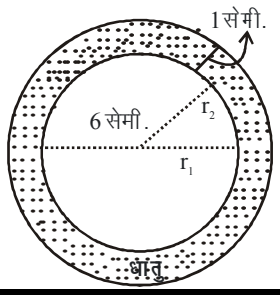
$$= 3\pi (\text{त्रिज्या})^2$$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times 42 \times 42$$

= 16632 वर्ग सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 10. लोहे की एक खोखले गेंद की मोटाई 1.0 सेमी. है। यदि इसका आंतरिक व्यास 6 सेमी. हो, तो 32560 घन सेमी. लोहे में ऐसी कितनी खोखली गोलियां बनाई जा सकती हैं?

हल : परंपरागत विधि



खोखले गेंद की मोटाई = 1 सेमी.

गेंद का आंतरिक व्यास = 6 सेमी.

$\therefore$ आंतरिक त्रिज्या $(r_1) = \frac{6}{2} = 3$ सेमी.

$\therefore$ गेंद की बाहरी त्रिज्या (r_2) = आंतरिक त्रिज्या + मोटाई

= 3 + 1 = 4 सेमी.

एक गेंद में लगी धातु का आयतन

$= \frac{4}{3}\pi$ {(बाहरी त्रिज्या)^3 – (आंतरिक त्रिज्या)^3}

$= \frac{4}{3}\pi\{(4)^3-(3)^3\}$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}(64-27)$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 37$ घन सेमी.

$\because \left(\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 37\right)$ घन सेमी. में बनी गोलियों की संख्या = 1

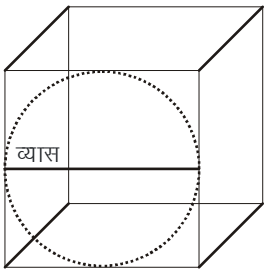
$\therefore$ 32560 घन सेमी. में बनी गोलियों की संख्या

$$= \frac{32560\times 1}{\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 37}$$

$$= \frac{32560\times 3\times 7}{4\times 22\times 37} = 210 \Rightarrow$$ **उत्तर**

प्रश्न 11. एक घन के अंदर एक गोला रखा है। गोला घन के प्रत्येक सतह को स्पर्श करता है। घन और गोले के आयतन में क्या अनुपात होगा?

हल : परंपरागत विधि



माना गोले की त्रिज्या r है।

$\therefore$ गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$\because$ गोला, घन की प्रत्येक सतह को स्पर्श करता है।

$\therefore$ घन की प्रत्येक विमा गोले के व्यास के बराबर होगी।

$\therefore$ घन की वीमा $= 2 \times r$

$\therefore$ घन का आयतन = (भुजा)^3

$= (2r)^2 = 8r^3$

$\therefore$ घन के आयतन और गोले के आयतन का अनुपात

$$= \frac{8r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$= \frac{8r^2}{\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}r^3}$$

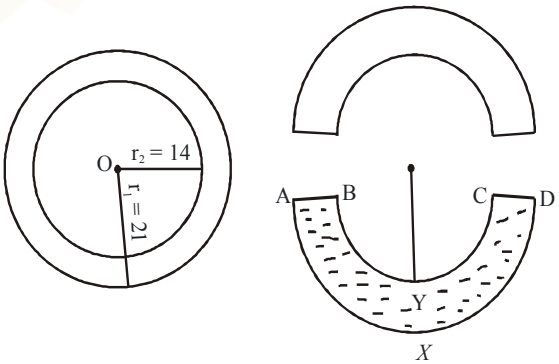
$$= \frac{8\times 3\times 7}{4\times 22}$$

$$= \frac{21}{11} \Rightarrow 21:11 \Rightarrow$$ **उत्तर**

सदैव ध्यान दें- यदि एक घन के अंदर रखा गोला घन के प्रत्येक सतह को स्पर्श करे, तो घन एवं गोले के आयतन में अनुपात हमेशा 21 : 11 होगा।

प्रश्न 12. किसी खोखले गोले की बाह्य त्रिज्या 21 सेमी. तथा आंतरिक त्रिज्या 14 सेमी. है। इसको दो बराबर भागों में काटकर दो अर्द्ध गोले बनाए गए हैं। एक अर्ध गोले का संपूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि



माना प्रथम चित्रानुसार, गोले की बाह्य त्रिज्या $r_1 = 21$ सेमी. तथा आंतरिक त्रिज्या $r_2 = 14$ सेमी. है तथा द्वितीय चित्रानुसार, पहले गोले से दो अर्द्ध गोले बनाएं गए हैं।

अब अर्द्ध गोले की AXD भाग का क्षेत्रफल

$$= 2\pi(r_1)^2$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= 2772 \text{ वर्ग सेमी.}$$

अर्द्ध गोले की BYC भाग का क्षेत्रफल $= 2\pi(r_2)^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 1232 \text{ वर्ग सेमी.}$$

(AB + CD) भाग का क्षेत्रफल $= \pi r_2^2 - \pi r_1^2$

$$= \pi\{(21)^2 - (14)^2\}$$

$$= \pi(441 - 196)$$

$$= \frac{22}{7} \times 245$$

$$= 22 \times 35 = 770 \text{ वर्ग सेमी.}$$

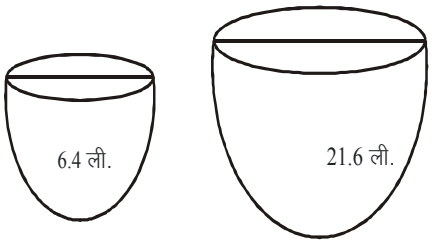
∴ एक अर्द्ध गोले का संपूर्ण पृष्ठ = AXD भाग का क्षेत्रफल + BYC भाग का क्षेत्रफल + (AB + CD) भाग का क्षेत्रफल

$= 2772 + 1232 + 770 = 4774$ वर्ग सेमी.

⇒ **उत्तर**

प्रश्न 13. दो अर्द्ध गोलाकार बर्तनों की धारिता क्रमशः 6.4 लीटर तथा 21.6 लीटर है। इनके आंतरिक वक्रपृष्ठों के क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?

हल : परंपरागत विधि



माना 6.4 लीटर वाले अर्द्ध गोले की त्रिज्या R तथा 21.6 लीटर वाले अर्द्ध गोले की त्रिज्या r है।

∴ 6.4 लीटर वाले अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi R^3$

$$\frac{6.4}{1000} = \frac{2}{3}\pi R^3 \quad .....(i)$$

[क्योंकि 6.4 लीटर = 0.0064 मीटर³]

तथा 21.6 लीटर वाले अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi R^3$

$$\frac{21.6}{1000} = \frac{2}{3}\pi r^3 \quad .....(ii)$$

समीकरण (i) में समीकरण (ii) से भाग देने पर

$$\frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{\frac{2}{3}\pi r^3} = \frac{\frac{6.4}{1000}}{\frac{21.6}{1000}}$$

$$\left(\frac{R}{r}\right)^3 = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}$$

$$\left(\frac{R}{r}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\therefore \frac{R}{r} = \frac{2}{3}$$

∴ आंतरिक वक्र पृष्ठों के क्षेत्रफलों का अनुपात

$$= \frac{2\pi R^2}{2\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow 4:9 \Rightarrow \text{उत्तर}$$

अनुपात विधि

आयतन में अनुपात →	64	:	216
त्रिज्या में अनुपात→	$\sqrt[3]{64}$	:	$\sqrt[3]{216}$
	↓		↓
	4	:	6
वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल →	$(4)^2$	:	$(6)^2$
में अनुपात	↓		↓
	16	:	36
	↓		↓
	4	:	9

⇒ **उत्तर**

प्रश्न 14. एक धातु के बने खोखले गोले की बाह्य त्रिज्या 9 सेमी. तथा आंतरिक त्रिज्या 8 सेमी. है। यदि धातु का भाव 2.40 रु. प्रति घन सेमी. हो, तो इस गोले का मूल्य क्या होगा?

हल : परंपरागत विधि

धातु के बने खोखले गोले का आयतन

$= \frac{4}{3}\pi$ {[बाह्य त्रिज्या]^3 – (आंतरिक त्रिज्या)^3}

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}(9)^3-(8)^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}(729-512)$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 217$

$= \frac{4}{3}\times 22\times 31 = \left(\frac{2728}{3}\right)$ घन सेमी.

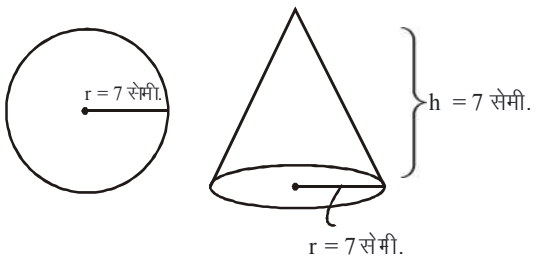
$\because$ 1 घन सेमी. धातु का मूल्य = 2.40 रु. है।

$\therefore \left(\frac{2728}{3}\right)$ घन सेमी. धातु का मूल्य $= 2.40 \times \frac{2728}{3}$

$= 0.80 \times 2728 = 2182.40$ रु. $\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 15. 7 सेमी. त्रिज्या के गोले से 7 सेमी.ऊंचाई का अधिकतम आयतन का शंकु बनाया गया है। शंकु का आयतन कितना होगा?

हल : परंपरागत विधि



शंकु की ऊंचाई = 7 सेमी. है।

शंकु के आधार की त्रिज्या = गोले की त्रिज्या = 7 सेमी.

$\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(7)^2\times 7$

$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 7\times 7\times 7$

$= \frac{1078}{3}$ घन सेमी.

$= 359.33$ घन सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

अभ्यास प्रश्न

1. एक गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 8π वर्ग इकाई है। इस गोले का आयतन कितना होगा?
2. एक ठोस गोलार्द्ध का आयतन संख्यात्मक रूप से उसके कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर है। गोलार्द्ध की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
3. 12 सेमी. त्रिज्या वाला एक धातु का गोला पिघलाकर तीन छोटे-छोटे गोले बनाए गए हैं। उनमें यदि दो छोटे गोलों की त्रिज्याएं क्रमशः 6 सेमी. तथा 8 सेमी. हो, तो तीसरे गोले की त्रिज्या कितनी होगी?
4. यदि किसी गोले के आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से समान हैं, तो उसका अर्द्ध व्यास कितना होगा?
5. 6 सेमी. व्यास वाली दो लोहे की गोलियां 6 सेमी. अर्द्ध व्यास वाले एक बेलनाकार बर्तन में डाले गए पानी में डुबोई जाती है, बर्तन में पानी का तल कितना ऊपर उठेगा?
6. 8 सेमी. अर्द्ध व्यास वाले एक ठोस धातु के गोले को पिघलाकर 64 बराबर छोटे ठोस गोले बनाए गए हैं। बड़े गोले का इस गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल से अनुपात क्या होगा?
7. दो गोलों का आयतन 8 : 27 के अनुपात में हैं। उनकी पूरी सतह का अनुपात क्या होगा?

8. धातु के तीन ठोस गोलों जिनके व्यास क्रमशः 6 सेमी., 8 सेमी. तथा 10 सेमी. हैं को पिघलाकर एक नए ठोस गोले के रूप में ढाला गया है, नए गोले का व्यास कितना होगा?

9. 7 सेमी. भुजा वाले घन से सबसे बड़ा गोला काटा गया, गोले का आयतन कितना होगा?

10. किसी ठोस लंब वृत्ताकार बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल किसी ठोस गोले के क्षेत्रफल का दुगुना है। यदि उन दोनों की त्रिज्या एक समान हो, तो बेलन तथा गोले के आयतनों का अनुपात कितना होगा?

11. 8 सेमी. त्रिज्या के लोहे के गोले को पिघलाकर 1 सेमी. त्रिज्या के कितने गोले बनाए जा सकते हैं?

12. एक 6 सेमी. व्यास के लोहे के गोले को पिघलाकर बेलनाकार तार में बदला गया है। यदि तार के सिरे का व्यास 0.2 सेमी. है, तो तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

अभ्यास प्रश्नों का हल

हल 1. परंपरागत विधि

माना गोले की त्रिज्या r इकाई है।

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

$$8\pi = 4\pi r^2$$

$$r^2 = 2$$

$$r = \sqrt{2}$$

$\therefore$ गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\pi(\sqrt{2})^3$$

$$= \frac{4}{3}\times 2\sqrt{2}\,\pi \text{ घन इकाई}$$

$$= \frac{8}{3}\times\frac{22}{7}\times\sqrt[2]{2} \text{ घन इकाई}$$

$$= \frac{176}{21}\times\sqrt{2} \text{ घन इकाई} \Rightarrow \textbf{उत्तर}$$

हल 2. परंपरागत विधि

माना गोलार्द्ध की त्रिज्या r है।

$\therefore$ गोलार्द्ध का आयतन = गोलार्द्ध का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = 3\pi r^2$$

$$\frac{r^3}{r^2} = 3\times\frac{3}{2}$$

$$r = \frac{9}{2} \text{ इकाई} \Rightarrow \textbf{उत्तर}$$

अतः गोलार्द्ध की त्रिज्या (r) = $\frac{9}{2}$ इकाई है।

हल 3. परंपरागत विधि

बड़े गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi(r)^3$

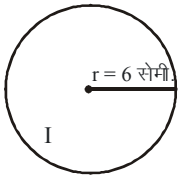
$$= \frac{4}{3}\pi(12)^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi\times 1728 \text{ घन सेमी.}$$

6 सेमी. त्रिज्या वाले छोटे गोले का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi(6)^3$$

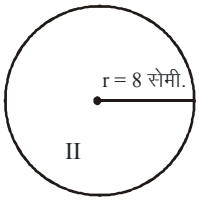
$$= \frac{4}{3}\pi\times 216 \text{ घन सेमी.}$$



8 सेमी. त्रिज्या वाले दूसरे छोटे गोले का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi(8)^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi\times 512 \text{ घन सेमी.}$$



यदि तीसरे गोले की त्रिज्या = R सेमी. है

तो तीसरे गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi(R)^3$

बड़े गोले का आयतन = तीनों छोटे गोलों के आयतन का योग

$\therefore \frac{4}{3}\pi\times1728=\frac{4}{3}\pi\times216+\frac{4}{3}\pi\times512+\frac{4}{3}\pi(R)^3$

$\frac{4}{3}\pi\times1728=\frac{4}{3}\pi\times(216+512+R^3)$

$1728=728+R^3$

$R^3=1728-728=1000$

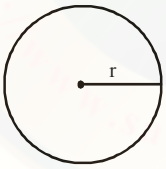
$\therefore$ R = 10 सेमी. ⇒ **उत्तर**

अतः तीसरे छोटे गोले की त्रिज्या 10 सेमी. है।

हल 4. परंपरागत विधि

माना गोले की त्रिज्या (अर्द्ध व्यास) = r इकाई

$\therefore$ गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$



तथा गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

$\because$ गोले का आयतन = गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

प्रश्नानुसार,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2$$

$$\frac{r^3}{r^2}=3$$

r = 3 इकाई ⇒ **उत्तर**

अतः गोले का अर्द्ध व्यास 3 इकाई है।

हल 5. परंपरागत विधि

लोहे की एक गोली की त्रिज्या = $\frac{\text{गोली के व्यास}}{2}$

$= \frac{6}{2} = 3$ सेमी.

लोहे की एक गोली का आयतन = $\frac{4}{3}\pi$ (त्रिज्या)^3

$= \frac{4}{3}\pi\times(3)^3$

$= \frac{4}{3}\pi\times3\times3\times3$

$= 36\pi$ घन सेमी.

$\therefore$ लोहे की दो गोली का आयतन = 2 × एक गोली का आयतन = $2\times36\pi = 72\pi$ घन सेमी.

$\because$ बेलनाकार बर्तन में डुबोए गए दोनों गोली का आयतन = बेलनाकार बर्तन में हटाए गए पानी का आयतन

माना हटाए गए पानी की ऊंचाई = h

$\therefore \pi6^2\times h = 72\pi$

$36\pi\times h = 72\pi$

h = 2 सेमी. ⇒ **उत्तर**

अतः बेलनाकार बर्तन में पानी का तल 2 सेमी. ऊपर उठेगा।

हल 6. परंपरागत विधि

धातु के गोले की त्रिज्या = 8 सेमी.

$\therefore$ गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi$ (त्रिज्या)^3

$= \frac{4}{3}\pi(8)^3$

चूंकि 8 सेमी. त्रिज्या वाले बड़े गोले से 64 छोटे-छोटे ठोस गोले बनाए जाते हैं। इसलिए 64 छोटे गोलों का आयतन बड़े गोले के आयतन के समान होगा।

अर्थात 64 छोटे गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi\ (8)^3$

$\therefore$ 1 छोटे गोले का आयतन = $\frac{4\pi(8)^3}{3\times 64}$

$= \frac{\frac{4}{3}\pi\times 8\times 8\times 8}{64}$

$= \frac{4}{3}\pi\times 8$ घन सेमी.

माना छोटे गोले की त्रिज्या R सेमी. है

$\therefore$ एक छोटे गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi R^3$

अर्थात $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\times 8$

$R^3 = 8$

$R = 2$ सेमी.

इस प्रकार प्रत्येक छोटे गोले की त्रिज्या 2 सेमी. है।

एक छोटे गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 4π(त्रिज्या)^2

$= 4\pi(2)^2 = 16\pi$ वर्ग सेमी.

अब बड़े गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 4π(त्रिज्या)^2

$= 4\pi\times(8)^2$

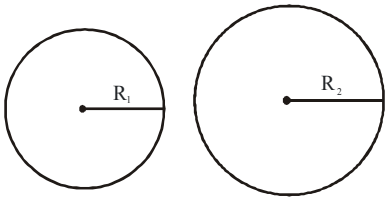
$= (4\pi\times 8\times 8)$ वर्ग सेमी.

अत: बड़े गोले एवं छोटे गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का

अनुपात = $\frac{4\pi\times 8\times 8}{16\pi}$

$= \frac{16}{1} \Rightarrow 16:1$ ⇒ **उत्तर**

हल 7. परंपरागत विधि



माना दोनों गोलों की त्रिज्याएं क्रमश: R_1 एवं R_2 हैं, तो R_1 त्रिज्या वाले गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi(R_1)^3$

तथा R_2 त्रिज्या वाले गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi(R_2)^3$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{\frac{4}{3}\pi(R_1)^3}{\frac{4}{3}\pi(R_2)^3} = \frac{8}{27}$$

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\therefore \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3} \quad \text{.....(i)}$$

इस प्रकार दोनों गोलों के पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात

$$= \frac{4\pi(R_1)^2}{4\pi(R_2)^2}$$

$$= \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow 4:9$$

[समीकरण (i) से $\frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3}$ रखा गया]

अत: दोनों गोलों के पूरी सतह का अनुपात 4 : 9 होगा।

⇒ **उत्तर**

अनुपात विधि

	I		II
आयतन का अनुपात →	8	:	27
त्रिज्या का अनुपात →	$\sqrt[3]{8}$	:	$\sqrt[3]{27}$
	↓		↓
	2	:	3

पृष्ठ की सतह का अनुपात→ $(2)^2 : (3)^2$

$\downarrow \quad \downarrow$

$4 : 9$

⇒ उत्तर

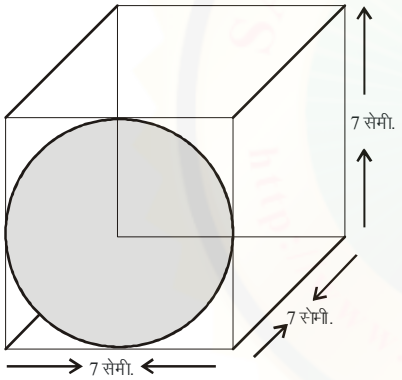
हल 8. प्रश्न 3 की तरह स्वयं हल करें (उत्तर-नए गोले का व्यास 12 = सेमी.)

हल 9. परंपरागत विधि

घन के अंदर काटे गए सबसे बड़े गोले का व्यास घन की भुजा के बराबर होगा।

अतः काटे गए गोले की त्रिज्या = $\frac{\text{घन की भुजा}}{2}$

$= \frac{7}{2}$ सेमी.



∴ गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi(\text{त्रिज्या})^2$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

$= \frac{539}{3} \Rightarrow 179.67$ घन सेमी.

⇒ उत्तर

हल 10. परंपरागत विधि

माना बेलन की त्रिज्या r तथा ऊंचाई h है।

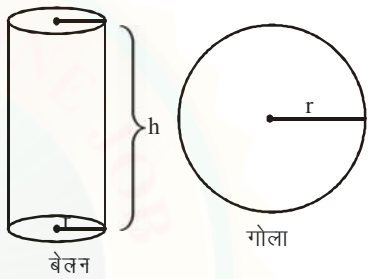
लंब वृत्ताकार बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi r(h + r)$

गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi(\text{त्रिज्या})^2$

$= 4\pi r^2$

(∵ बेलन की त्रिज्या = गोले की त्रिज्या है, इसलिए गोले की त्रिज्या = r)



चूंकि ठोस लंब वृत्ताकार बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ठोस गोले के क्षेत्रफल का दुगुना है।

अर्थात $2\pi r(h+r) = 2 \times 4\pi r^2$

$h + r = 4r$

$h = 4r - r = 3r$ ..... (i)

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

तथा गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

∴ बेलन एवं गोले के आयतनों का अनुपात

$= \frac{\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3}$

$= \frac{3h}{4r}$ **[समी. (i) से h = 3r रखने पर]**

$= \frac{3 \times 3r}{4r} = \frac{9}{4}$

$= 9 : 4$ ⇒ उत्तर

हल 11. परंपरागत विधि

एक बड़े गोले से जितने छोटे गोले बनेंगे उनका आयतन बड़े गोले के आयतन के बराबर होगा।

बड़े गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi(\text{त्रिज्या})^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times (8)^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times 512$ घन सेमी.

1 सेमी. त्रिज्या वाले छोटे गोले का आयतन

$= \frac{4}{3}\pi(1)^3$

$= \frac{4}{3}\pi$ घन सेमी.

अतः अभीष्ट गोलों की संख्या

$= \frac{\text{बड़े गोले का आयतन}}{\text{एक छोटे गोले का आयतन}}$

$= \frac{\frac{4}{3}\pi \times 512}{\frac{4}{3}\pi} = 512 \Rightarrow$ **उत्तर**

सूत्र विधि

अभीष्ट गोलों की संख्या $= \left[\frac{\text{बड़े गोले की त्रिज्या}}{\text{एक छोटे गोले की त्रिज्या}}\right]^3$

$= \left(\frac{8}{1}\right)^3 = 512 \Rightarrow$ **उत्तर**

हल 12. परंपरागत विधि

लोहे के गोले का आयतन = पूरी लंबाई के बेलनाकार तार का आयतन

माना तार की लंबाई = l सेमी.

$\therefore$ गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi\,(\text{त्रिज्या})^3$

(गोले की त्रिज्या $= \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{6}{2} = 3$ सेमी.)

$= \frac{4}{3}\pi(3)^3$

$= 36\pi$ घन सेमी.

तार का आयतन $= \pi(\text{त्रिज्या})^2 \times$ लंबाई

$= \pi \times (0.1)^2 \times l$

(तार के आधार की त्रिज्या $= \frac{\text{तार के आधार का व्यास}}{2}$

$= \frac{0.2}{2} = 0.1$ सेमी.)

चूंकि गोला को पिघलाकर एक तार बनाया जाता है यानी गोले का आयतन = तार का आयतन

अर्थात $36\pi = \pi \times (0.1)^2 \times l$

$l = \frac{36}{.01} = 3600$ सेमी.

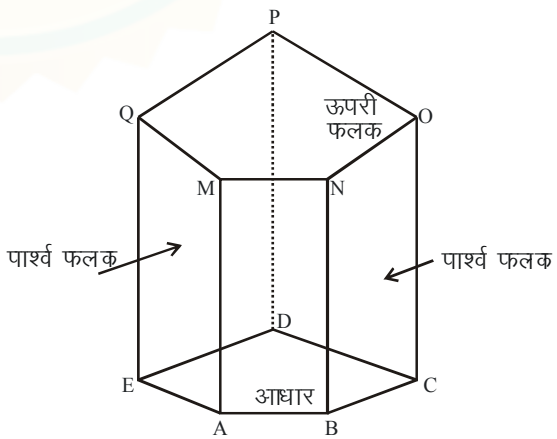
$= \frac{3600}{100}$ मीटर $= 36$ मीटर

($\therefore$ **100 सेमी. = 1 मीटर**) $\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रिज्म एवं पिरामिड

❑ **प्रिज्म (Prism)**

वह ठोस होता है जिसके ऊपरी और निचले सतह या फलक एक जैसे होते हैं और उसके पार्श्व फलक आयताकार होते हैं।



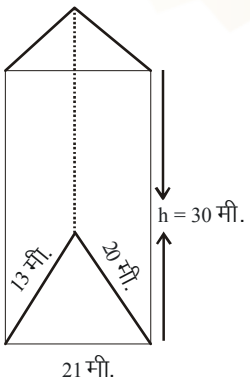
❑ **प्रिज्म से संबंधित कुछ महत्त्वपूर्ण जानकारियां**

- प्रिज्म के आधार पर जो आयताकार फलकें होती हैं, उन्हें पार्श्व फलकें कहते हैं। आधार में जितनी भुजाएं होती हैं, उतनी ही पार्श्व फलकें। उपर्युक्त प्रिज्म में ABMN, BCNO, CDOP, DEPQ एवं EAQM पार्श्व फलकें हैं।
- आधार ABCDE और ऊपरी सिरा (MNOPQ) भी फलकें होती है। इस प्रकार प्रिज्म में कुल फलकों की संख्या = आधार में भुजाओं की संख्या + 2
- किसी प्रिज्म का आधार त्रिभुज हो, तो फलकों की संख्या = 3 + 2 = 5 होगी।
- दोनों फलकों को मिलाने वाली रेखा को कोर कहते हैं। प्रिज्म में कोरों की संख्या = प्रिज्म के आधार में भुजाओं की संख्या × 3 । यदि किसी प्रिज्म का आधार चतुर्भुज हो, तो कोरों की संख्या = 4 × 3 = 12 होगी।
- प्रिज्म में शीर्षों की संख्या = प्रिज्म के आधार में भुजाओं की संख्या × 2 । यदि किसी प्रिज्म का आधार पंचभुज हो, तो शीर्षों की संख्या = 5 × 2 = 10 होगी।
- प्रिज्म का पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊंचाई, प्रिज्म के संपूर्ण-पृष्ठ का क्षेत्रफल = 2 × आधार का क्षेत्रफल + पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल, प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

☞ **एक उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-**

प्रश्न- एक त्रिभुजाकार प्रिज्म जिसकी ऊंचाई 30 मीटर है और जिसके आधार की भुजाएं क्रमशः 21 मीटर, 20 मीटर और 13 मीटर हैं, तो त्रिभुजाकार प्रिज्म का आयतन और संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल क्या है?

हल : सूत्र विधि



आधार का परिमाप = 21 + 20 + 13 = 54 मीटर और ऊंचाई = 30 मीटर है।

आधार का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(जहां a, b, c त्रिभुज की भुजाएं तथा $s = \frac{\text{परिमाप}}{2}$

$= \frac{54}{2} = 27$ मीटर है)

∴ आधार का क्षेत्रफल

$= \sqrt{27(27-21)(27-20)(27-13)}$

$= \sqrt{27 \times 6 \times 7 \times 14} = 126$ वर्ग मी.

∴ प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

= 126 × 30 = 3780 घन मीटर

प्रिज्म का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 × आधार का क्षेत्रफल + पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल

= 2 × आधार का क्षेत्रफल + (आधार का परिमाप × ऊंचाई)

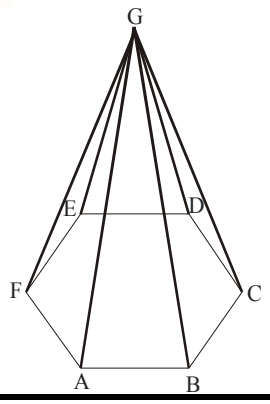
= 2 × 126 + (54 × 30)

= 252 + 1620

= 1872 वर्ग मीटर ⇒ **उत्तर**

❑ पिरामिड (Pyramid)

समतल फलकों से घिरी हुई वह त्रिविमीय आकृति है जिसका एक फलक त्रिभुज या चतुर्भुज या बहुभुज होता है और शेष फलक त्रिभुजीय होते हैं जिनके शीर्ष आधार के बाहर एक सर्वनिष्ठ बिंदु पर मिलते हैं।



चित्र में GABCDEF एक पिरामिड है जिसका शीर्ष G और आधार एक षटभुज ABCDEF है।

यहां तलों की संख्या 7 (ABG, BCG, CDG, DEG, EFG, FAG, ABCDEF) कोरों की संख्या 12 और शीर्षों की संख्या 7 है।

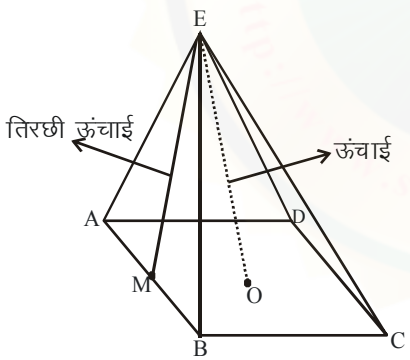
यदि पिरामिड का आधार बहुभुज अर्थात त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज आदि हो और उसके शीर्ष से आधार पर खींचा गया लंब, आधार को इसके केंद्रीय बिंदु पर प्रतिच्छेद करे, तो ऐसे पिरामिड को लंब पिरामिड कहते हैं और लंब की लंबाई पिरामिड की ऊंचाई कहलाती है।

➲ लंब पिरामिड की तिरछी ऊंचाई

आधार के अतिरिक्त अन्य त्रिभुजाकार फलक पिरामिड के तिरछे फलक कहलाते हैं। लंब पिरामिड के तिरछे फलक समद्विबाहु त्रिभुज होते हैं।

इन त्रिभुजों की ऊंचाई, शीर्ष से आधार की किसी भुजा के मध्य बिंदु तक खींचे जाने वाले रेखा खंड को पिरामिड की तिरछी ऊंचाई कहते हैं।

देखें-



उपर्युक्त चतुर्भुज पिरामिड में EO पिरामिड की ऊंचाई तथा EM पिरामिड की तिरछी ऊंचाई है। (यहां AB का मध्य बिंदु M है)

उपर्युक्त पिरामिड में चतुर्भुज ABCD आधार है।

जिस पिरामिड का आधार त्रिभुज है, उसे चतुष्फलक (Tetrahedron) कहते हैं। इसमें चार त्रिभुजीय फलक, छह कोर तथा चार शीर्ष होते हैं।

यदि चतुष्फलक की सभी कोरें लंबाई में बराबर हों, तो उसे समचतुष्फलक कहते हैं।

उपरि पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार का परिमाप × तिरछी ऊंचाई

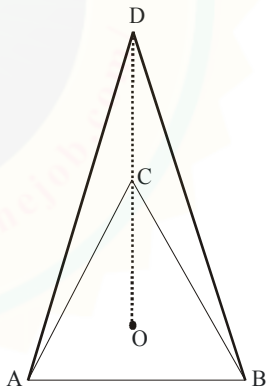
लंब पिरामिड का आयतन = $\frac{1}{3}$ × आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

सूत्र- लंब पिरामिड का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = आधार का क्षेत्रफल + तिरछा पृष्ठ

☞ पिरामिड पर उदाहरणार्थ एक प्रश्न देखें

प्रश्न-उस पिरामिड का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका आधार 4 सेमी. भुजा का समबाहु त्रिभुज है और उसकी लंबवत ऊंचाई $6\sqrt{3}$ सेमी. है।

हल : सूत्र विधि



पिरामिड ABCDO का आधार समबाहु ΔABC है और लंबवत ऊंचाई DO है।

∴ पिरामिड का आयतन = $\frac{1}{3}$× आधार का क्षेत्रफल × लंबवत ऊंचाई

$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ भुजा × भुजा × $6\sqrt{3}$

(आधार समबाहु त्रिभुज है जिसका क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}\times$ भुजा × भुजा)

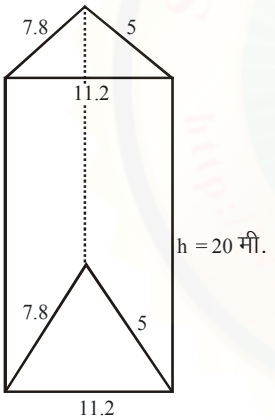
$= \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4\times 4\times 6\sqrt{3}$

= 24 घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

प्रिज्म एवं पिरामिड पर उदाहरणार्थ प्रश्न

प्रश्न 1. एक पार्श्व तल का आधार एक त्रिभुज है जिसकी भुजाएं 11.2 सेमी., 7.8 सेमी. और 5 सेमी. हैं। इसकी ऊंचाई 20 सेमी. है। पार्श्व तल का आयतन तथा संपूर्ण सतह का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि



पार्श्व तल (प्रिज्म) के आधार का क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$s = \frac{a+b+c}{2}$ (a = 11.2, b = 7.8 तथा c = 5)

$= \frac{11.2+7.8+5}{2}$

$= \frac{24}{2} \Rightarrow 12$

∴ पार्श्व तल के आधार का क्षेत्रफल

$= \sqrt{12\times(12-11.2)(12-7.8)(12-5)}$

$= \sqrt{12\times 0.8\times 4.2\times 7}$

$= \sqrt{282.24}$ = 16.8 वर्ग सेमी.

पार्श्व तल का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

= 16.8 × 20 = 336 घन सेमी.

आधार का परिमाप = त्रिभुज का परिमाप

= 11.2 + 7.8 + 5 = 24 सेमी.

∴ पार्श्व तल का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊंचाई

= 24 × 20 = 480 वर्ग सेमी.

∴ संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = 2 × आधार का क्षेत्रफल + पार्श्व तल का क्षेत्रफल

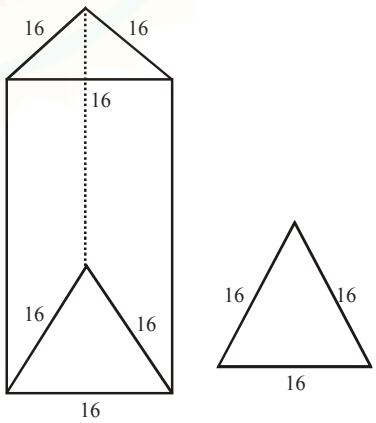
= 2 × 16.8 + 480

= 33.6 + 480 ⇒ 513.6 वर्ग सेमी.

⇒ **उत्तर**

प्रश्न 2. किसी प्रिज्म का आयतन $800\sqrt{3}$ घन सेमी. तथा समत्रिभुजीय आधार की भुजा 16 सेमी. है। प्रिज्म की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि



प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

[चूंकि आधार समबाहु त्रिभुज है, इसलिए आधार का

क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 \times 16 = 64\sqrt{3}$ घन सेमी]

$\therefore\ 800\sqrt{3} = 64\sqrt{3} \times$ ऊंचाई

ऊंचाई $= \frac{800\sqrt{3}}{64\sqrt{3}} = 12.5$ सेमी. ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 3. किसी ठोस लंब प्रिज्म का आधार एक त्रिभुज है जिसकी भुजाएं क्रमशः 6 सेमी., 8 सेमी. तथा 10 सेमी. हैं। उस प्रिज्म की ऊंचाई 12 सेमी. है, तो प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि

प्रिज्म की आधार की भुजाएं क्रमशः 6 सेमी., 8 सेमी. एवं 10 सेमी. हैं। इन भुजाओं से समकोण त्रिभुज बनेगा।

$6^2 + 8^2 = 10^2$

$36 + 64 = 100$

$100 = 100$

इस प्रकार समकोण Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ छोटी भुजाओं का गुणनफल

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$ वर्ग सेमी.

तथा आधार का परिमाप अर्थात समकोण Δ का परिमाप $= 6 + 8 + 10 = 24$ सेमी.

$\therefore$ प्रिज्म का पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊंचाई $= 24 \times 12 = 288$ वर्ग सेमी.

$\therefore$ प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल + 2 × आधार का क्षेत्रफल

$= (288 + 24 \times 2)$ वर्ग सेमी.

$= 336$ वर्ग सेमी.

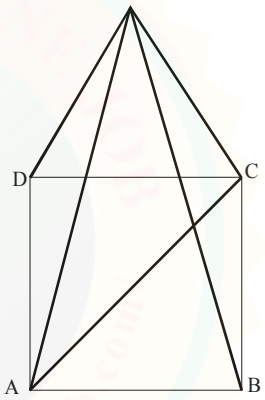
प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$= 24 \times 12 = 288$ घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 4. एक लंब पिरामिड का आधार वर्गाकार है आधार के विकर्ण की लंबाई $24\sqrt{2}$ मीटर है। यदि पिरामिड का आयतन 1728 घन मीटर है, तो उसकी ऊंचाई क्या होगी?

हल : परंपरागत विधि

पिरामिड का आयतन $= \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई दिया है, पिरामिड के आधार का विकर्ण (AC) $= 24\sqrt{2}$



$\therefore$ वर्गाकार आधार ABCD का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

वर्गाकार आधार ABCD का विकर्ण (AC) = भुजा $\times \sqrt{2}$

$= 24\sqrt{2}$

$\therefore$ वर्गाकार आधार की भुजा = 24 मीटर

$\therefore$ वर्गाकार आधार का क्षेत्रफल = (24 × 24) वर्ग मीटर

इस प्रकार पिरामिड का आयतन $= \frac{1}{3} \times 24 \times 24 \times$ ऊंचाई

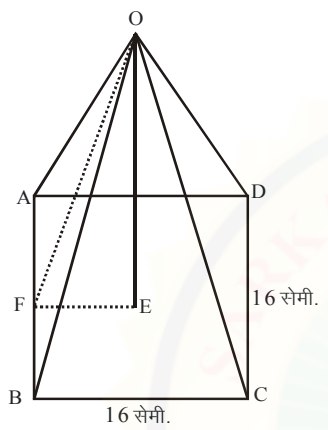
$1728 = \frac{1}{3} \times 24 \times 24 \times$ ऊंचाई

$\therefore$ ऊंचाई $= \frac{1728 \times 3}{24 \times 24} = 9$ मीटर

⇒ **उत्तर**

प्रश्न 5. किसी समलंब पिरामिड का आधार 16 सेमी. लंबी भुजा वाला वर्ग है। यदि उसकी ऊंचाई 15 सेमी. हो, तो उस पिरामिड के पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल एवं आयतन कितना होगा?

हल : परंपरागत विधि



चूंकि पिरामिड का आधार ABCD वर्ग है।

और पिरामिड के आधार के प्रत्येक भुजा = 16 सेमी.

तथा पिरामिड की लंबवत ऊंचाई (OE) = 15 सेमी.

$\therefore$ समकोण त्रिभुज OEF में पाइथागोरस प्रमेय से

$(OF)^2 = (OE)^2 + (EF)^2$

$(OF)^2 = (15)^2 + (8)^2$

$$\left(\frac{BC}{2} = EF, \therefore EF = \frac{16}{2} = 8\right)$$

$OF = \sqrt{225+64} = \sqrt{289}$

OF = 17 सेमी. जो पिरामिड की तिरछी ऊंचाई है।

$\therefore$ पिरामिड का पार्श्व पृष्ठ = $\frac{1}{2} \times$ आधार का परिमाप $\times$ तिरछी $\times$ ऊंचाई $= \frac{1}{2} \times (4 \times 16) \times 17$

$= 32 \times 17 = 544$ वर्ग सेमी.

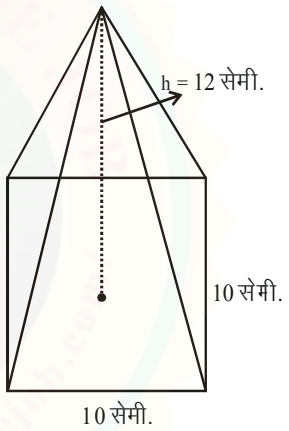
तथा पिरामिड का आयतन = $\frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ लंबवत $\times$ ऊंचाई $= \frac{1}{3} \times 16 \times 16 \times 15$

$= 25 \times 6 \times 5 = 1280$ घन सेमी.

$\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 6. 12 सेमी. ऊंचे एक पिरामिड का आधार एक वर्ग है जिसकी प्रत्येक भुजा 10 सेमी. है। इस पिरामिड का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि



चूंकि पिरामिड का आधार वर्ग है

$\therefore$ आधार का क्षेत्रफल = भुजा $\times$ भुजा

$= 10 \times 10 = 100$ वर्ग सेमी.

पिरामिड का आयतन = $\frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊंचाई

$= \frac{1}{3} \times 100 \times 12$

$= 400$ घन सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 7. एक प्रिज्म का आधार एक त्रिभुज है जिसकी भुजाएं क्रमशः 17 सेमी., 25 सेमी. तथा 28 सेमी. हैं। यदि प्रिज्म का आयतन 4200 घन सेमी. हो, तो उसकी ऊंचाई तथा पार्श्व क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि

प्रिज्म के आधार त्रिभुज की भुजाएं क्रमशः a = 17 सेमी., b = 25 सेमी. तथा c = 28 सेमी. हैं।

अतः $s = \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{17+25+28}{2} = 35$ सेमी.

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{35(35-17)(35-25)(35-28)}$

$= \sqrt{35\times18\times10\times7}$

$= \sqrt{7\times5\times3\times3\times2\times5\times2\times7}$

$= 7\times5\times3\times2 = 210$ वर्ग सेमी.

प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

4200 = 210 × ऊंचाई

ऊंचाई = $\frac{4200}{210} = 20$ सेमी.

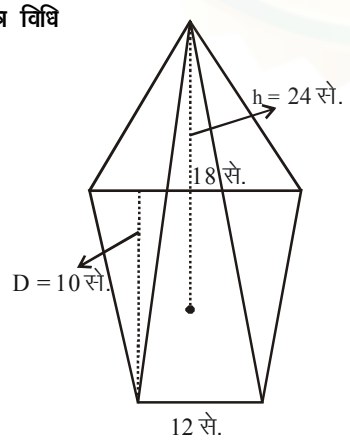
पार्श्व क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊंचाई

= (17+25+28)×20

= 70 × 20 = 1400 वर्ग सेमी. ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 8. एक प्रिज्म का आधार समलंब चतुर्भुज है। इसकी समांतर भुजाएं क्रमशः 18 एवं 12 सेमी. हैं तथा उनके बीच की दूरी 10 सेमी. है। यदि प्रिज्म की ऊंचाई 24 सेमी. हो, तो आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र विधि



प्रिज्म के आधार का क्षेत्रफल = समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\times$ (समांतर भुजाओं का योग) × उनके बीच की दूरी

$= \frac{1}{2}\times(18+12)\times10$

$= \frac{1}{2}\times30\times10$

= 150 वर्ग सेमी.

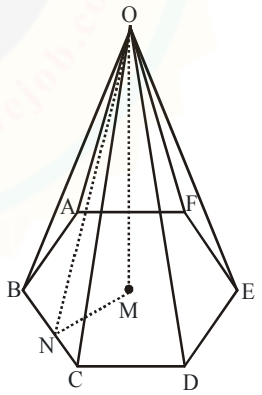
प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

= 150 × 24

= 3600 घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 9. एक पिरामिड का आधार समषटभुज है जिसकी प्रत्येक भुजा 20 सेमी. की है। यदि पिरामिड की लंबवत ऊंचाई 10 सेमी. हो, तो उसका तिरछा पृष्ठ कितना होगा?

हल : परंपरागत विधि



पिरामिड का आधार ABCDEF एक समषटभुज है जिसकी प्रत्येक भुजा 20 सेमी. है अर्थात AB = BC = CD = DE = EF = FA = 20 सेमी.

∴ $MN = \frac{\sqrt{3}}{2}\times20 = 10\sqrt{3}$ सेमी.

लंबवत ऊंचाई = OM = 10 सेमी. (दिया है)

समकोण त्रिभुज MNO में

$$(ON)^2 = (OM)^2 + (MN)^2$$
$$= (10)^2 + (10\sqrt{3})^2$$
$$= 100 + 300 = 400$$
$$ON = \sqrt{400} = 20 \text{ सेमी.}$$

इस प्रकार पिरामिड की तिरछी ऊंचाई (ON) = 20 सेमी. होगी।

अतः पिरामिड का तिरछा पृष्ठ = $\frac{1}{2}$ × आधार का परिमाप × तिरछी ऊंचाई

$$= \frac{1}{2} \times (6 \times 20) \times 20$$
$$= \frac{1}{2} \times 120 \times 20$$
$$= 1200 \text{ वर्ग सेमी.} \Rightarrow \textbf{उत्तर}$$

प्रश्न 10. 60 मीटर लंबी एवं 30 मीटर चौड़ी आयतीय कागज को मोड़कर दो समषटभुजीय प्रिज्म बनाए जाते हैं, तो उनके आयतनों का अनुपात क्या होगा?

हल : परंपरागत विधि

यदि 30 मीटर चौड़ाई को मानकर समषटभुजीय प्रिज्म बनाया जाता है, तो पहले प्रिज्म के आधार अर्थात समषटभुज की भुजा = $\frac{30}{6}$ = 5 मीटर

तथा ऊंचाई = 60 मीटर होगी।

∴ पहले प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2 \times 60$$

[समषटभुज का क्षेत्रफल = $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$]

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (5)^2 \times 60$$
$$= 2250\sqrt{3} \text{ घन मीटर}$$

दूसरे प्रिज्म के लिए आधार समषटभुज की भुजा = $\frac{60}{6}$ = 10 मीटर तथा दूसरे प्रिज्म की ऊंचाई = 30 मीटर होगी।

∴ दूसरे प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10 \times 10 \times 30$$
$$= 4500\sqrt{3} \text{ घन मीटर}$$

अतः दोनों प्रिज्मों का अनुपात = $\frac{\text{पहले प्रिज्म का आयतन}}{\text{दूसरे प्रिज्म का आयतन}}$

$$= \frac{2250\sqrt{3}}{4500\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{2} \Rightarrow 1:2 \Rightarrow \textbf{उत्तर}$$

अभ्यास प्रश्न

1. एक लंब प्रिज्म के त्रिकोणीय आधार का परिमाप 60 सेमी. है और आधार की भुजाएं 5 : 12 : 13 के अनुपात में हैं तथा प्रिज्म की ऊंचाई 50 सेमी. है, तो उसका आयतन ज्ञात कीजिए।
2. एक प्रिज्माकार पात्र में कुछ ऊंचाई तक जल भरा हुआ है। इसका आधार 6 सेमी. भुजा का समबाहु त्रिभुज है। इसमें 3 सेमी. भुजा का एक घन डाला जाता है जो पूर्णतः डूब जाता है। जल स्तर में कितनी वृद्धि होगी?
3. एक समलंबी प्रिज्म का आधार 173 वर्ग सेमी. क्षेत्रफल वाला एक समबाहु त्रिभुज है। उस प्रिज्म का आयतन 10380 घन सेमी. है। उस प्रिज्म की पार्श्व सतह का क्षेत्रफल कितना होगा?
4. एक समलंबी प्रिज्म के त्रिभुजाकार आधार का परिमाप 15 सेमी. है और उस त्रिभुजाकार आधार के अंतःवृत्त की त्रिज्या 3 सेमी. है। यदि उस प्रिज्म का आयतन 270 घन सेमी. हो, तो प्रिज्म की ऊंचाई कितनी होगी?
5. किसी समकोणीय प्रिज्म का आधार एक समलंब चतुर्भुज है। उसकी समांतर भुजाओं की लंबाई 8 सेमी. तथा 14 सेमी. है और समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 8 सेमी. है। यदि प्रिज्म का आयतन 1056 घन सेमी. हो, तो उसकी ऊंचाई कितनी कितनी होगी?

6. एक लंब प्रिज्म का आधार 12 सेमी. भुजा वाला समबाहु त्रिभुज है। यदि प्रिज्म का आयतन $1296\sqrt{3}$ घन सेमी. है, तो उसकी ऊंचाई कितनी है?

7. एक लंब पिरामिड का आधार वर्गाकार है आधार के विकर्ण की लंबाई $24\sqrt{2}$ मीटर है। यदि पिरामिड का आयतन 1728 घन मीटर हो, तो उसकी ऊंचाई होगी?

8. यदि एक समलंब पिरामिड का आधार 5 सेमी., 12 सेमी. तथा 13 सेमी. भुजाओं वाला त्रिभुज हो और उसका आयतन 330 घन सेमी. हो, तो उसकी ऊंचाई कितने सेमी. होगी?

9. एक प्रिज्म का आधार एक समकोण त्रिभुज है जिसकी समकोण के आसन्न भुजाएं 10 सेमी. और 12 सेमी. लंबी हैं। प्रिज्म की ऊंचाई 20 सेमी. है। प्रिज्म की सामग्री का घनत्व 6 ग्राम प्रति घन सेमी. है, तो प्रिज्म का भार कितना होगा?

10. किसी त्रिभुजीय पिरामिड की तीन आसन्न कोरें परस्पर लंब हैं। उनकी लंबाइयां 4, 5 तथा 6 सेमी. हैं। इस पिरामिड का आयतन ज्ञात कीजिए।

11. एक लंब पिरामिड का आयतन 17280 घन सेमी. तथा ऊंचाई 32 सेमी. है। यदि उसका आधार आयताकार हो तथा एक भुजा 45 सेमी. हो, तो दूसरी भुजा ज्ञात कीजिए।

12. यदि किसी समचतुष्फलक की हर भुजा की लंबाई 12 मीटर हो, तो समचतुष्फलक का आयतन कितना होगा?

अभ्यास प्रश्नों का हल

हल 1. परंपरागत विधि

$\because$ लंब प्रिज्म का आधार त्रिभुज है।

$\therefore$ त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं का योग

माना त्रिभुज की तीनों भुजाएं क्रमशः $5x$, $12x$ एवं $13x$ हैं।

$\therefore\ 5x + 12x + 13x = 60$

$30x = 60$

$x = 2$

इस प्रकार त्रिभुज की भुजाएं क्रमशः होंगी

$= 5x,\ 12x$ एवं $13x$

$= 5 \times 2,\ 12 \times 2$ एवं 13×2

$= 10,\ 24$ एवं 26

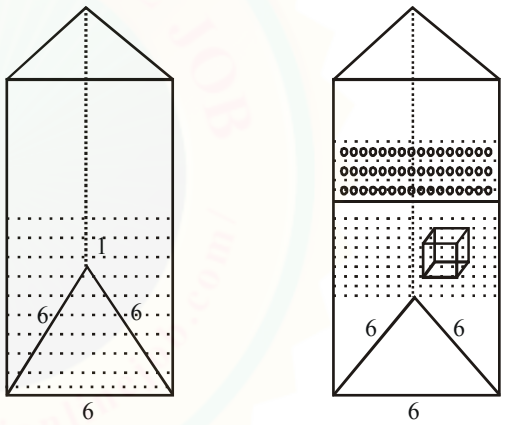
चूंकि $(26)^2 = (24)^2 + (10)^2$ है यानी त्रिभुज समकोण है। इसलिए समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times 24 \times 10 = 120 \text{ वर्ग सेमी.}$$

अतः लंब प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$= 120 \times 50 = 6000$ घन सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

हल 2. परंपरागत विधि



प्रिज्माकार पात्र में कोई भी वस्तु डुबाने पर वस्तु के आयतन के बराबर पानी ऊपर उठेगा।

अर्थात ऊपर उठे पानी का आयतन = 3 सेमी. भुजा के घन का आयतन

= आधार का क्षेत्रफल × उठे पानी की ऊंचाई

चूंकि प्रिज्माकार पात्र का आधार समबाहु त्रिभुज है, इसलिए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \text{भुजा} \times \text{भुजा}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 \times 6$$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 \times 6 \times$ उठे पानी की ऊंचाई $= 3 \times 3 \times 3$

उठे हुए पानी की ऊंचाई $= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 4}{6 \times 6 \times \sqrt{3}} = \sqrt{3}$ सेमी.

$= 1.732$ सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

अत: जल स्तर में $\sqrt{3}$ सेमी. अर्थात 1.732 सेमी. की वृद्धि होगी।

हल 3. सूत्र विधि

प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$10380 = 173 \times$ ऊंचाई

$\therefore$ ऊंचाई $= \frac{10380}{173} = 60$ सेमी.

आधार का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ भुजा × भुजा

[क्योंकि प्रिज्म का आधार समबाहु त्रिभुज है]

$173 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$

$(\text{भुजा})^2 = \frac{173 \times 4}{\sqrt{3}}$

$= \frac{173 \times 4}{1.73} \quad (\because \sqrt{3} = 1.73)$

भुजा $= \sqrt{100 \times 4}$

$= 10 \times 2 = 20$ सेमी.

अत: प्रिज्म का पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊंचाई $= 3 \times 20 \times 60$

$= 3600$ वर्ग सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

हल 4. परंपरागत विधि

ज्ञात है- आधार का परिमाप = 15 सेमी.

$\because$ आधार त्रिभुजाकार है।

माना इसके अंत:वृत्त की त्रिज्या r है

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल = s × त्रिज्या

जहां $s = \frac{\text{त्रिभुज का परिमाप}}{2}$

इस प्रकार आधार का क्षेत्रफल $= \frac{15}{2} \times 3$

$= \frac{45}{2}$ वर्ग सेमी.

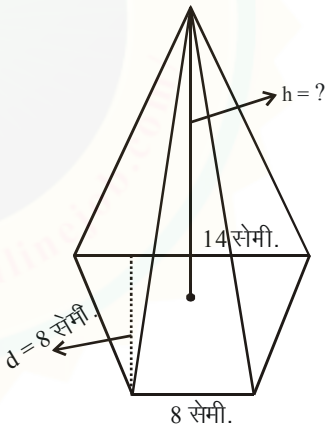
समलंबी प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$270 = \frac{45}{2} \times$ ऊंचाई

ऊंचाई $= 270 \times \frac{2}{45} = 12$ सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

अत: प्रिज्म की ऊंचाई 12 सेमी. है।

हल 5. सूत्र विधि



प्रिज्म के आधार समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \frac{\text{समांतर भुजाओं का योग}}{2} \times$ समांतर भुजाओं के बीच दूरी

$= \left(\frac{8+14}{2}\right) \times 8$

$= 88$ वर्ग सेमी.

प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$1056 = 88 \times$ ऊंचाई

ऊंचाई $= \frac{1056}{88} = 12$ सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

अत: प्रिज्म की ऊंचाई 12 सेमी. है।

हल 6. परंपरागत विधि

माना लंब प्रिज्म की ऊंचाई h है।

$\therefore$ लंब प्रिज्म का आयतन = प्रिज्म के आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$1296\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12 \times 12 \times$ ऊंचाई

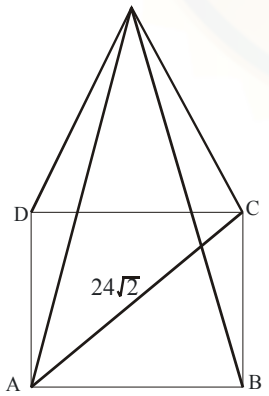
[$\therefore$ प्रिज्म का आधार समबाहु त्रिभुज है, इसलिए समबहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times$ भुजा × भुजा]

$\therefore$ ऊंचाई $= \frac{1296\sqrt{3} \times 4}{12 \times 12 \times \sqrt{3}}$

$= 9 \times 4 = 36$ सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

अत: प्रिज्म की ऊंचाई 36 सेमी. है।

हल 7. परंपरागत विधि



पिरामिड का आधार वर्गाकार है एवं उसका विकर्ण $24\sqrt{2}$ मीटर है।

वर्ग का विकर्ण (AC) = भुजा × $\sqrt{2}$

$24\sqrt{2}$ = भुजा × $\sqrt{2}$

$\therefore$ भुजा = 24 मीटर

$\therefore$ वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

$= 24 \times 24 = 576$ वर्ग मीटर

पिरामिड का आयतन = $\frac{1}{3} \times$ पिरामिड के आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$1728 = \frac{1}{3} \times 576 \times$ ऊंचाई

ऊंचाई $= \frac{1728 \times 3}{576}$

$= 3 \times 3 \Rightarrow 9$ मीटर $\Rightarrow$ **उत्तर**

अत: पिरामिड की ऊंचाई 9 मीटर है।

हल 8. परंपरागत विधि

पिरामिड का आधार त्रिभुज है जिसकी भुजाएं क्रमश: 5 सेमी., 12 सेमी. तथा 13 सेमी. है। यह त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज होगा क्योंकि $(13)^2 = (12)^2 + (5)^2$ है।

पिरामिड के आधार का क्षेत्रफल = समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार × लंब

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$ वर्ग सेमी.

समलंब पिरामिड का आयतन $= \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$330 = \frac{1}{3} \times 30 \times$ ऊंचाई

$\therefore$ ऊंचाई $= \frac{330 \times 3}{30} = 33$ सेमी. $\Rightarrow$ **उत्तर**

अत: पिरामिड की ऊंचाई 33 सेमी. है।

हल 9. परंपरागत विधि

चूंकि प्रिज्म का आधार एक समकोण त्रिभुज है।
इसलिए प्रिज्म के आधार का क्षेत्रफल = समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60$ वर्ग सेमी.

$\therefore$ प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई
= 60 × 20 = 1200 घन सेमी.

$\because$ 1 घन सेमी. प्रिज्म का भार = 6 ग्राम

$\therefore$ 1200 घन सेमी. प्रिज्म का भार होगा = 1200 × 6
= 7200 ग्राम

($\therefore$ 1000 ग्राम = 1 किग्रा.)

$= \frac{7200}{1000} = 7.2$ किग्रा.

अतः प्रिज्म का भार 7.2 किग्रा. है। ⇒ **उत्तर**

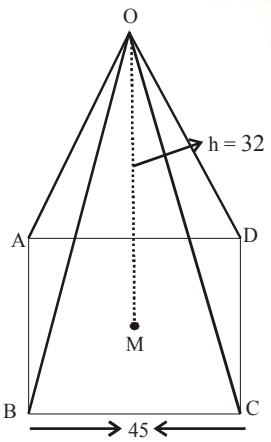
हल 10. सूत्र विधि

यदि किसी पिरामिड की तीनों आसन्न कोरें परस्पर लंब हों,

तो उस पिरामिड का आयतन = $\frac{\text{तीनों कोरों का गुणनफल}}{6}$

$= \frac{4 \times 5 \times 6}{6} = 20$ घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

हल 11. परंपरागत विधि



पिरामिड का आधार आयत है
इस आयत की एक भुजा 45 सेमी. तथा पिरामिड OABCD की ऊंचाई (OM) = 32 सेमी. है।

पिरामिड का आयतन = $\frac{1}{3}$ × आधार का क्षेत्रफल × लंबवत ऊंचाई

$17280 = \frac{1}{3} \times 45 \times$ दूसरी भुजा $\times 32$

(आधार का क्षेत्रफल = पहली भुजा × दूसरी भुजा)

दूसरी भुजा = $\frac{17280 \times 3}{45 \times 32} = 36$ सेमी.

अतः पिरामिड के आयताकार आधार की दूसरी भुजा 36 सेमी. है। ⇒ **उत्तर**

हल 12. सूत्र विधि

समचतुष्फलक का आयतन = $\frac{1}{12} \times (\text{भुजा})^3 \times \sqrt{2}$

$= \frac{1}{12} \times (12)^3 \times \sqrt{2}$

$= \frac{1}{12} \times 12 \times 12 \times 12 \times \sqrt{2}$

$= 144\sqrt{2}$ घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

अतः समचतुष्फलक का आयतन $144\sqrt{2}$ घन सेमी. है।

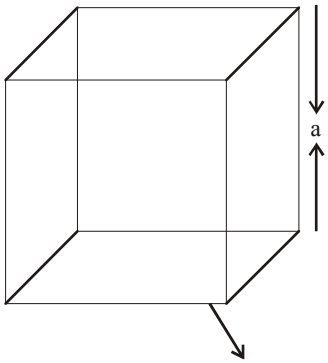
❑ **अब देखें मिश्रित त्रिविमीय आकृतियों के उदाहरणार्थ प्रश्न**

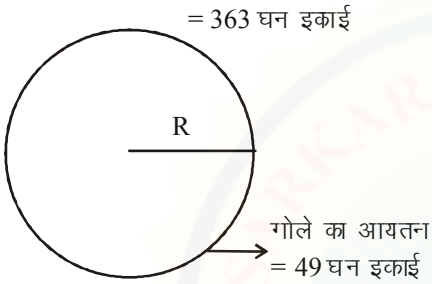
➲ **घन, घनाभ एवं गोला पर उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-**

प्रश्न 1. एक घन और एक ठोस गोले के आयतनों का अनुपात 363 : 49 है। तद्नुसार उस घन के एक सिरे की लंबाई और गोले की त्रिज्या का अनुपात कितना होगा?

हल : परंपरागत विधि

माना घन की भुजा a इकाई है तथा गोले की त्रिज्या R इकाई है।





$\because$ घन का आयतन = $(a)^3$

तथा गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi(R)^3$

$$\therefore \frac{\text{घन का आयतन}}{\text{गोले का आयतन}} = \frac{363}{49}$$

$$\frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{363}{49}$$

$$\frac{a^3}{R^3} = \frac{363}{49} \times \frac{4}{3} \times \pi$$

$$\left(\frac{a}{R}\right)^3 = \frac{363}{49} \times \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \qquad \left(\because \pi = \frac{22}{7}\right)$$

$$= \frac{121 \times 4 \times 2 \times 11}{7 \times 7 \times 7}$$

[$\frac{363}{3}$ = 121 तथा 22 = 2 × 11 किया गया]

$$= \frac{11 \times 11 \times 2 \times 2 \times 2 \times 11}{7 \times 7 \times 7}$$

[121 = 11 × 11, 4 = 2 × 2 एवं 49 = 7 × 7 किया गया]

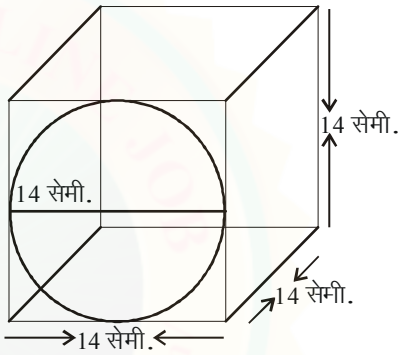
$$\frac{a}{R} = \frac{11 \times 2}{7} = \frac{22}{7}$$

$\therefore$ a: R = 22 : 7 ⇒ **उत्तर**

अत: घन के सिरे की लंबाई एवं गोले की त्रिज्या में 22 : 7 का अनुपात है।

प्रश्न 2. 14 सेमी. भुजा वाले घन से सबसे बड़ा गोला काटा गया है। गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि



घन के अंदर काटे गए सबसे बड़े गोले का व्यास घन की भुजा के बराबर होगा।

$$\therefore \text{काटे गए गोले की त्रिज्या} = \frac{\text{घन की भुजा}}{2}$$

$$= \frac{14}{2} = 7 \text{ सेमी.}$$

$$\therefore \text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \times (7)^2$$

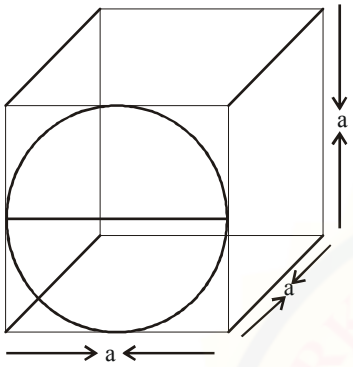
$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$$

= 1437.33 घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

अत: गोले का आयतन 1437.33 घन सेमी. होगा।

प्रश्न 3. एक घन के आयतन का उसके अंत: गोले का आयतन से क्या अनुपात होगा?

हल : परंपरागत विधि



माना घन की एक भुजा a इकाई है।

$\therefore$ घन का आयतन = a^3

घन के अंत: गोले का व्यास = घन की एक भुजा

$\therefore$ गोले की त्रिज्या = $\frac{a}{2}$ इकाई

$\therefore$ गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi(r)^3$

$$= \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}$$

$$= \frac{\pi a^3}{6}$$

$$\therefore \frac{\text{घन का आयतन}}{\text{गोले का आयतन}} = \frac{a^3}{\pi \frac{a^3}{6}}$$

$$= \frac{6}{\pi} = 6 : \pi$$

यदि π का मान $\frac{22}{7}$ रख दिया जाए,

तो अभीष्ट अनुपात $= 6 : \frac{22}{7}$

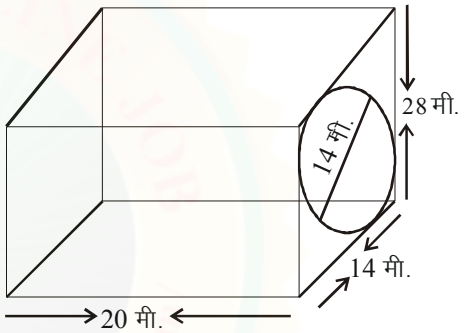
$= 42 : 22$

$= 21 : 11$ होगा। $\Rightarrow$ **उत्तर**

ध्यान दें-किसी घन का आयतन तथा उसके अंत: सबसे बड़े गोले का आयतन का अनुपात सदैव 21 : 11 होगा।

प्रश्न 4. यदि किसी घनाभ की लंबाई 20 मी., चौड़ाई 14 मी. तथा ऊंचाई 28 मी. हो, उसमें रखे जा सकने वाले बड़े-से-बड़े गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परंपरागत विधि



स्पष्ट है घनाभ की चौड़ाई के बराबर व्यास वाला बड़ा गोला होगा जो उस घनाभ में रखा जा सके।

$\therefore$ बड़े-से-बड़े गोले का व्यास = 14 मीटर

$\therefore$ गोले की त्रिज्या = $\frac{14}{2}$ = 7 मीटर

$\therefore$ गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

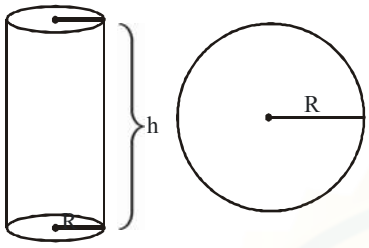
= 616 वर्ग मीटर $\Rightarrow$ **उत्तर**

➲ बेलन एवं गोला या गोलार्द्ध पर उदाहरणार्थ प्रश्न देखें

प्रश्न 1. एक समलंबी वृत्ताकार बेलन और एक गोले के वक्रीय तल के क्षेत्रफल परस्पर बराबर हैं। यदि उस बेलन तथा गोले की त्रिज्याएं भी एक समान हों, तो उनके आयतनों का अनुपात कितना होगा?

हल : परंपरागत विधि

माना बेलन की त्रिज्या R इकाई है, तो गोले की भी त्रिज्या R इकाई होगी (क्योंकि दोनों की त्रिज्याएं एक समान हैं)



बेलन का वक्रीय तल का क्षेत्रफल = $2\pi Rh$

तथा गोले के वक्रीय तल का क्षेत्रफल = $4\pi R^2$

$\because$ बेलन का वक्रीय तल का क्षेत्रफल = गोले के वक्रीय तल का क्षेत्रफल

$\therefore\ 2\pi Rh = 4\pi R^2$

$$h = \frac{4\pi R^2}{2\pi R}$$

$$h = 2R \qquad \text{.....(i)}$$

बेलन का आयतन = $\pi R^2 h$

तथा गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi R^3$

$$\therefore \frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{गोले का आयतन}} = \frac{\pi R^2 h}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$= \frac{3h}{4R}$$

$$= \frac{3 \times 2R}{4 \times R}$$

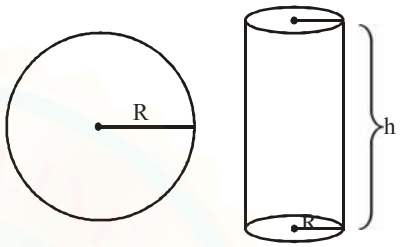
[समीकरण (i) से h = 2R रखने पर]

$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$= 3:2 \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 2. R त्रिज्या वाले एक गोले तथा R त्रिज्या के आधार वाले एक बेलन का आयतन एक समान है। यदि उस बेलन की ऊंचाई h हो, तो R तथा h में क्या अनुपात होगा?

हल : परंपरागत विधि



R त्रिज्या वाले गोले एवं R त्रिज्या तथा h ऊंचाई वाले बेलन का आयतन समान है।

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi R^3$

तथा बेलन का आयतन = $\pi R^2 h$

$\because$ गोले का आयतन = बेलन का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 h$$

$$4\pi R^3 = 3\pi R^2 h$$

$$4R = 3h$$

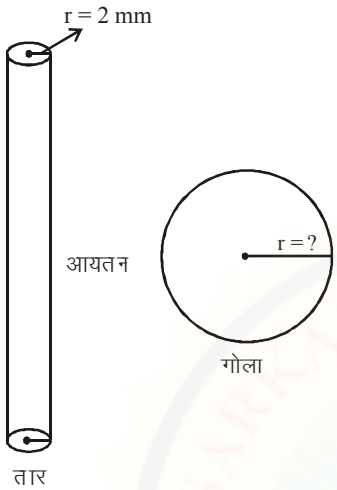
$$\frac{R}{h} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3:4$$

अतः $R:h = 3:4$

$\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 3. एक तांबे के तार जिसकी लंबाई 36 मीटर तथा व्यास 2 मिमी. है, को पिघलाकर एक गोला बनाया गया है। गोले का अर्द्धव्यास (सेमी. में) कितना होगा?

हल : परंपरागत विधि



तार की लंबाई (h)= 36 मीटर = 36 × 100 = 3600 सेमी.

तार की त्रिज्या (r) = $\frac{\text{तार का व्यास}}{2}$

$= \frac{2}{2} = 1$ मिमी.

$= \frac{1}{10}$ सेमी. ($\because$ 1 मिमी. = $\frac{1}{10}$ सेमी.)

तार का आयतन = $\pi r^2 h$

$= \pi \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times 3600$

$= 36\pi$ घन सेमी.

माना तार को पिघलाकर बनाए गए गोले की त्रिज्या r है।

$\therefore$ गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

गोले का आयतन = तार का आयतन

(क्योंकि तार को पिघलाकर उतने ही आयतन का एक गोला बनाया जाता है)

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$

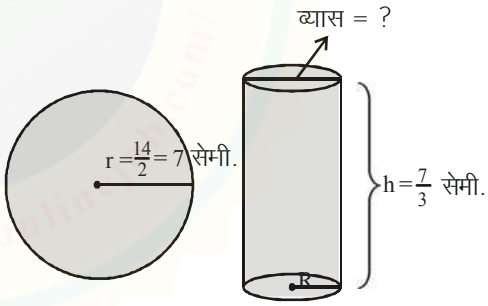
$r^3 = \frac{36 \times 3}{4} = 27$

r = 3 सेमी. ⇒ **उत्तर**

अत: गोले का अर्द्धव्यास (त्रिज्या) 3 सेमी है।

प्रश्न 4. शॉट-पुट खेल के लिए प्रयुक्त की जाने वाली लोहे की गेंद का व्यास 14 सेमी. है। इसे पिघलाकर एक $\frac{7}{3}$ सेमी. ऊंचाई का ठोस बेलन बनाया गया है। बेलन के एक आधार का व्यास कितना होगा?

हल : परंपरागत विधि



गोले की त्रिज्या (r) = $\frac{14}{2}$ = 7 सेमी.

बेलन की ऊंचाई (h) = $\frac{7}{3}$ सेमी.

माना बेलन की त्रिज्या R है।

गोले का आयतन = बेलन का आयतन

(क्योंकि गोले को पिघलाकर उतने ही आयतन का एक बेलन बनाया गया है)

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi R^2 h$$

$$\frac{4}{3}\times 7\times 7\times 7 = R^2\times\frac{7}{3}$$

$$R^2 = 4\times 7\times 7$$

$$R = 2\times 7 = 14 \text{ सेमी.}$$

अतः बेलन के आधार का व्यास = बेलन की त्रिज्या × 2

$= R\times 2$

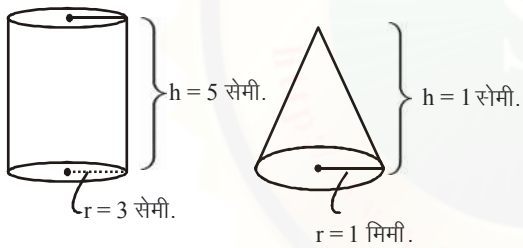
$= 14\times 2 = 28$ सेमी.

⇒ उत्तर

➲ **बेलन एवं शंकु पर उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-**

प्रश्न 1. 3 सेमी. त्रिज्या के आधार और 5 सेमी. ऊंचाई वाले एक ठोस धातु के बेलन को पिघलाकर 1 सेमी. ऊंचाई और 1 मिमी. त्रिज्या के आधार वाले कितने शंकु बनाए जा सकते हैं?

हल : परंपरागत विधि



बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$= \pi(3)^2\times 5$

$= \pi\times 9\times 5 = 45\pi$ घन सेमी. तथा

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times 1$

($\because$ 1 मिमी. = $\frac{1}{10}$ सेमी.)

$= \frac{1}{3}\times\pi\times\frac{1}{100}$

$= \frac{\pi}{300}$

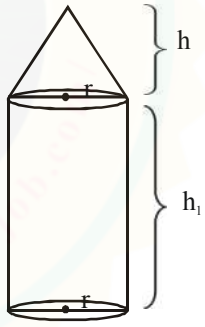
बेलन को पिघलाकर बनाए गए शंकु की संख्या =

$$\frac{\text{ठोस बेलन का आयतन}}{\text{एक शंकु का आयतन}}$$

$$= \frac{45\pi}{\frac{\pi}{300}} = 45\times 300 \Rightarrow 13500 \Rightarrow \text{उत्तर}$$

प्रश्न 2. एक ठोस में एक वृत्तीय बेलन के ऊपर सही फिट होने वाला लंब वृत्तीय शंकु रखा है। शंकु की ऊंचाई h है। यदि ठोस का कुल आयतन शंकु के आयतन से तीन गुना है, तो वृत्तीय बेलन की ऊंचाई कितनी होगी?

हल : परंपरागत विधि



माना बेलन तथा शंकु की त्रिज्या r तथा बेलन की ऊंचाई h_1 एवं शंकु की ऊंचाई h है।

$\therefore$ बेलन का आयतन = $\pi r^2 h_1$

तथा शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

इस प्रकार ठोस का कुल आयतन = बेलन का आयतन +

शंकु का आयतन = $\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

ठोस का कुल आयतन शंकु के आयतन का तीन गुना है

अर्थात $\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h = 3 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$\pi r^2 h_1 = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\pi r^2 h_1 = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

$$h_1 = \frac{2}{3}h$$

अतः वृत्तीय बेलन की ऊंचाई शंकु की ऊंचाई का $\frac{2}{3}$ गुना है।

नोट : प्रश्न में यह भी पूछा जा सकता है कि बेलन एवं शंकु की ऊंचाई में अनुपात क्या होगा?

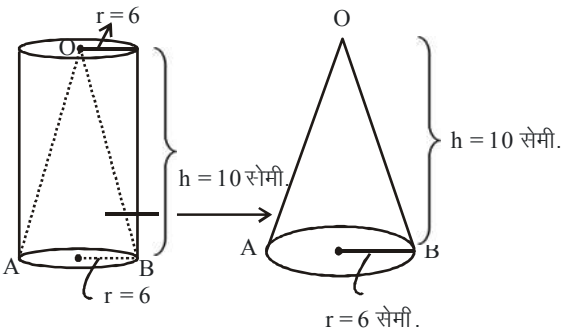
इस प्रकार $\frac{h_1}{h} = \frac{2}{3}$

$h_1 : h = 2 : 3$ ⇒ **उत्तर**

अतः बेलन एवं शंकु की ऊंचाई का अनुपात 2 : 3 होगा।

प्रश्न 3. 10 सेमी. ऊंचाई और 6 सेमी. त्रिज्या के आधार वाले एक ठोस बेलन से उसी ऊंचाई और उसी जैसा आधार वाला एक शंकु निकाल लिया गया है। तद्नुसार शेष बचे ठोस का आयतन कितना रह गया है?

हल : परंपरागत विधि



बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$= \pi(6)^2 \times 10$

$= 360\pi$ घन सेमी.

शंकु OAB का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \pi \times (6)^2 \times 10$

$= 120\pi$ घन सेमी.

शेष बचे ठोस का आयतन = बेलन का आयतन – शंकु OAB का आयतन

$= (360\pi - 120\pi)$ घन सेमी.

$= 240\,\pi$ घन सेमी.

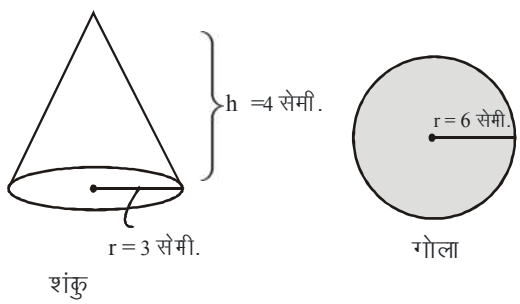
$= 240 \times \frac{22}{7} \approx 754.28$ घन सेमी.

⇒ **उत्तर**

➲ **शंकु एवं गोला या गोलार्द्ध पर उदाहरणार्थ कुछ प्रश्न देखें-**

प्रश्न 1. धातु के कुछ ठोस लंब वृत्तीय शंकुओं जिनमें से प्रत्येक के आधार की त्रिज्या 3 सेमी. और ऊंचाई 4 सेमी. है, को पिघलाकर 6 सेमी. त्रिज्या का एक ठोस गोला बनाया जाता है। लंब वृत्तीय शंकुओं की संख्या क्या होगी?

हल : परंपरागत विधि



एक शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \times (3)^2 \times 4$

$= 12\pi$ घन सेमी.

तथा परिणामी ठोस गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times (6)^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times 6 \times 6 \times 6$

$= 288\,\pi$ घन सेमी.

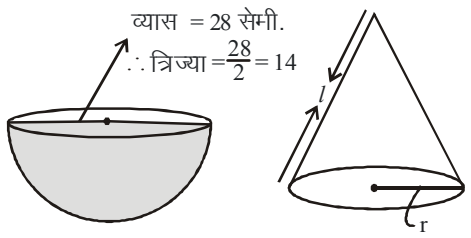
∴ अभीष्ट शंकुओं की संख्या =

$$\frac{\text{परिणामी ठोस गोले का आयतन}}{\text{एक शंकु का आयतन}}$$

$= \frac{288\pi}{12\pi} = 24 \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 2. 28 सेमी. व्यास वाली एक अर्द्धवृत्ताकार धातु की परत को मोड़कर एक खुले शंक्वाकार प्याले में परिवर्तित कर दिया गया है। उस प्याले का आयतन कितना होगा?

हल : परंपरागत विधि



माना शंकु के आधार की त्रिज्या r सेमी. है।

जब अर्द्धवृत्ताकार सीट को खुले शंकु के रूप में जोड़ा जाएगा, तो अर्द्धवृत्ताकार सीट की त्रिज्या शंकु की तिर्यक ऊंचाई एवं सीट की परिधि शंकु की परिधि होगी।

∴ शंकु के आधार की परिधि = अर्द्ध वृत्ताकार धातु की परिधि

$2\pi r = \pi R$

$2\pi r = \pi \times 14$

$\therefore\ r = \frac{14}{2} = 7$

इस प्रकार शंकु की ऊंचाई =

$\sqrt{(\text{तिर्यक ऊंचाई})^2 - (\text{त्रिज्या})^2}$

$h = \sqrt{(14)^2 - (7)^2}$

$h = \sqrt{196 - 49} = \sqrt{147}$

h = 12.12 सेमी.

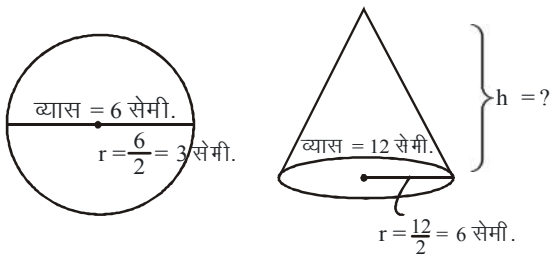
अतः शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 12.12$

= 622.16 घन सेमी. ⇒ **उत्तर**

प्रश्न 3. 6 सेमी. व्यास की धातु की एक ठोस गोलाकार गेंद को पिघलाकर एक शंकु के रूप में जिसके आधार पर व्यास 12 सेमी. है, ढाला जाता है। शंकु की ऊंचाई कितनी है?

हल : परंपरागत विधि



गोला शंकु

ठोस गोलाकार गेंद की त्रिज्या = $\frac{6}{2} = 3$ सेमी.

$\therefore$ ठोस गोलाकार गेंद का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times (3)^3$

$= 36\pi$ घन सेमी.

शंकु की त्रिज्या = $\frac{12}{2} = 6$ सेमी.

माना शंकु की ऊंचाई h है।

$\therefore$ शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi (6)^2 \times h$

$= 12\pi h$

चूंकि ठोस गोला को पिघलकर एक शंकु बनाया जाता है

$\therefore$ गोला का आयतन = शंकु का आयतन

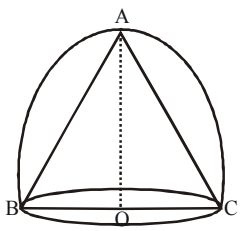
$36\pi = 12\pi h$

$h = 3$ सेमी.

Dee Mehkar Tube F&: सेमी. है। $\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 4. एक अर्द्ध गोले और एक शंकु के आधार बराबर हैं। यदि उनकी ऊंचाइयां भी बराबर हों, तो उनके वक्र पृष्ठों का अनुपात क्या होगा?

हल : परंपरागत विधि



चित्र से स्पष्ट है कि शंकु की त्रिज्या एवं शंकु की ऊंचाई समान होगी।

माना शंकु की त्रिज्या r है।

$\therefore$ शंकु की त्रिज्या = शंकु की ऊंचाई

= अर्द्ध गोले की त्रिज्या

$= r$

$\therefore$ अर्द्ध गोले का वक्र पृष्ठ $= 2\pi r^2$

शंकु की तिर्यक ऊंचाई $l = \sqrt{r^2 + r^2}$

$= \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$

$\therefore$ शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi r l$

$= \pi r \times r\sqrt{2}$

$= \pi r^2 \sqrt{2}$

$\therefore \frac{\text{अर्द्ध गोले का वक्र पृष्ठ}}{\text{शंकु का वक्र पृष्ठ}} = \frac{2\pi r^2}{\pi r^2 \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $= 2 : \sqrt{2}$ या $\sqrt{2} : 1 \Rightarrow$ **उत्तर**

अभ्यास प्रश्न

1. किसी ठोस घनाभ की लंबाई 12 सेमी., चौड़ाई 11 सेमी. तथा ऊंचाई 9 सेमी. है। इसे पिघलाकर 3 सेमी. व्यास की कितनी छोटी गोलियां बनाई जा सकती हैं?
2. यदि किसी गोलार्द्ध तथा लंब वृत्तीय बेलन की ऊंचाई तथा त्रिज्या क्रमशः बराबर हैं, तो गोलार्द्ध तथा बेलन के आयतन का अनुपात क्या होगा?
3. उस बेलन की ऊंचाई क्या है जिसके आयतन और त्रिज्या वही हैं जो 12 सेमी. व्यास वाले गोलक के हैं?
4. 6 सेमी. व्यास वाले एक ठोस लोहे के गोले को पिघलाकर एक खोखली बेलनाकार नली बनाई गई है जिसका बाह्य व्यास 10 सेमी. है और लंबाई 4 सेमी. है। उस नली की मोटाई कितनी होगी?

5. एक बेलन और एक शंकु के आधारों की त्रिज्याएं बराबर हैं और ऊंचाई भी बराबर है। यदि उनके वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल का अनुपात 8 : 5 है, तो उनकी त्रिज्या और ऊंचाई का क्या अनुपात होगा?

6. एक बेलन की ऊंचाई तथा एक शंकु की ऊंचाई का अनुपात 3 : 4 तथा उनके आधार के अर्द्ध व्यास का अनुपात 2 : 3 है, तो उनके आयतनों का अनुपात क्या होगा?

7. एक शंक्वाकार बर्तन जिसके आधार की त्रिज्या 12 सेमी. है और ऊंचाई 50 सेमी. है। किसी तरल पदार्थ से भरा हुआ है। इस तरल पदार्थ को एक बेलनाकार बर्तन में, जिसका अंदर का अर्द्ध व्यास 10 सेमी. है, उलट दिया जाता है। बेलनाकार बर्तन में तरल पदार्थ की ऊंचाई क्या होगी?

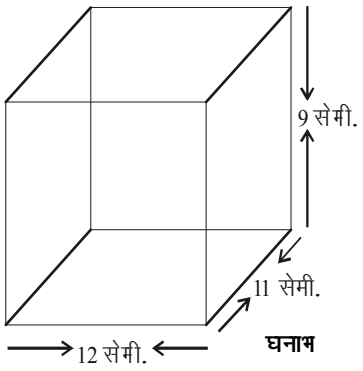
8. एक शंकु के आधार का अर्द्धव्यास तथा एक गोले का अर्द्धव्यास दोनों में से प्रत्येक की माप 8 सेमी. है, साथ ही इन दोनों ठोसों के आयतन बराबर हैं। शंकु की तिर्यक ऊंचाई कितनी होगी?

9. 15 सेमी. अर्द्धव्यास वाले लकड़ी के एक गोले में से एक 15 सेमी. ऊंचाई और 30 सेमी. आधार व्यास वाला शंकु काटा गया है। इसमें नष्ट हुई लकड़ी की मात्रा का प्रतिशत क्या होगा?

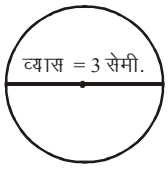
10. धातु से बने एक ठोस शंकु जिसकी ऊंचाई 10 सेमी. और आधार की त्रिज्या 20 सेमी. है, को पिघलाकर 4 सेमी. व्यास की कितनी गोलियां बनाई जा सकती हैं?

अभ्यास प्रश्नों का हल

हल 1. परंपरागत विधि



घनाभ



गोला

$\therefore$ त्रिज्या = $\frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{3}{2}$

= 15 सेमी.

ठोस घनाभ का आयतन = लं. × चौ. × ऊं.

= (12 × 11 × 9) घन सेमी.

एक ठोस छोटी गोली का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

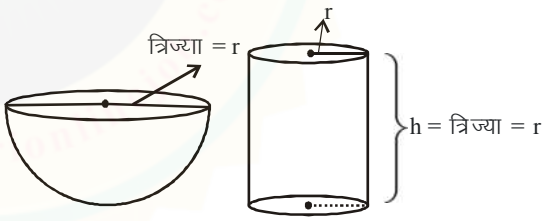
$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (1.5)^3$

अभीष्ट गोलियों की संख्या = $\frac{\text{ठोस घनाभ का आयतन}}{\text{एक ठोस गोली का आयतन}}$

$= \frac{12 \times 11 \times 9}{\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5 \times 1.5}$

= 84 ⇒ **उत्तर**

हल 2. परंपरागत विधि



माना गोलार्द्ध की त्रिज्या r इकाई है, तो लंब वृत्तीय बेलन की ऊंचाई (h) = r इकाई तथा त्रिज्या = r इकाई होगी।

$\therefore \frac{\text{गोलार्द्ध का आयतन}}{\text{लंब वृत्तीय बेलन का आयतन}} = \frac{\frac{2}{3}\pi(\text{त्रिज्या})^3}{\pi \times (\text{त्रिज्या})^2 \times (\text{ऊंचाई})}$

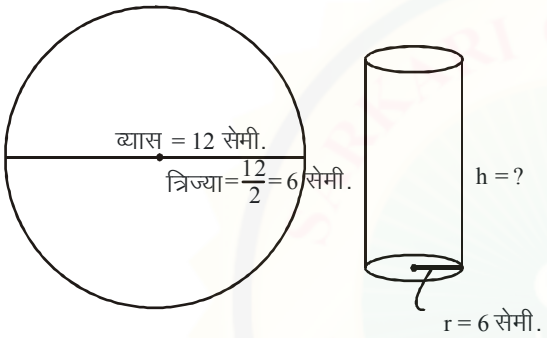
$= \frac{\frac{2}{3}\pi r^3}{\pi(r^2)r}$

$$= \frac{2}{3}\frac{r^3}{r^3}$$

$$= \frac{2}{3} \Rightarrow 2:3$$

अतः गोलार्द्ध तथा लंब वृत्तीय बेलन के आयतन का अनुपात 2 : 3 होगा। ⇒ **उत्तर**

हल 3. परंपरागत विधि



गोलक का व्यास = 12 सेमी.

∴ गोलक की त्रिज्या = $\frac{12}{2}$ = 6 सेमी.

गोलक का आयतन = बेलन का आयतन

∴ $\frac{4}{3}\pi$ (त्रिज्या)^3 = π(त्रिज्या)^2 × ऊंचाई

$\frac{4}{3}\pi(6)^3 = \pi \times (6)^2 \times$ ऊंचाई

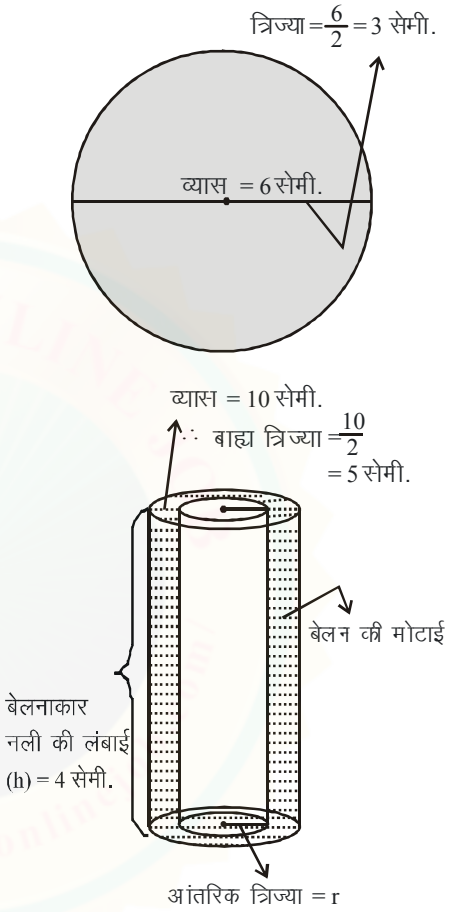
$\frac{4}{3}\pi \times 6 \times 6 \times 6 = \pi \times 6 \times 6 \times$ ऊंचाई

∴ ऊंचाई = $\frac{4}{3} \times 6 \Rightarrow 8$ सेमी.

अतः बेलन की ऊंचाई 8 सेमी. है।

⇒ **उत्तर**

हल 4. परंपरागत विधि



गोले का व्यास = 6 सेमी.

∴ गोले की त्रिज्या = $\frac{6}{2}$ = 3 सेमी.

खोखली बेलनाकार नली का बाह्य व्यास = 10 सेमी.

∴ खोखली बेलनाकार नली की बाह्य त्रिज्या = $\frac{10}{2}$ = 5 सेमी.

माना बेलनाकार नली की आंतरिक त्रिज्या = r सेमी.

गोले का आयतन = खोखले बेलन का आयतन

[क्योंकि ठोस गोले को पिघलाकर खोखला बेलन बनाया गया है इसलिए ठोस गोले का आयतन = खोखले बेलन का आयतन]

$\frac{4}{3}\pi$(त्रिज्या)^3 = π{(बाह्य त्रिज्या)^2– (आंतरिक त्रिज्या)^2}

× बेलन की लंबाई

$\frac{4}{3}\pi(3)^3 = \pi\{(5)^2 - (r)^2\} \times 4$

$(3)^3 = 25 - r^2$

$r^2 = 25 - 9 = 16$

$r = \sqrt{16} = 4$ सेमी.

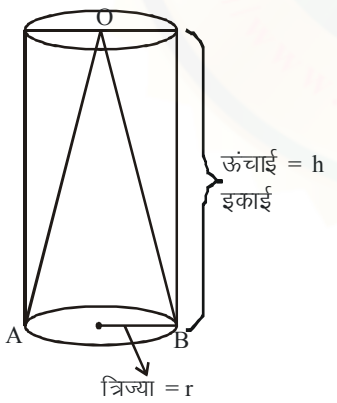
अत: खोखले बेलनाकार नली की मोटाई =

बाह्य त्रिज्या – आंतरिक त्रिज्या

= 5 – 4 ⇒ 1 सेमी.

⇒ **उत्तर**

हल 5. परंपरागत विधि



माना बेलन की त्रिज्या = r इकाई

तथा ऊंचाई = h इकाई है।

∴ बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi rh$

तथा शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = πrl

$$\frac{\text{बेलन का वक्र पृष्ठ}}{\text{शंकु का वक्र पृष्ठ}} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{2\pi rh}{\pi rl} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{h}{l} = \frac{4}{5}$$

माना शंकु की ऊंचाई या बेलन की ऊंचाई = $4x$ इकाई

तथा शंकु की तिर्यक ऊंचाई = $5x$ इकाई है

∴ शंकु की त्रिज्या = $\sqrt{(\text{तिर्यक ऊंचाई})^2 - (\text{ऊंचाई})^2}$

$= \sqrt{(5x)^2 - (4x)^2}$

$= \sqrt{25x^2 - 16x^2}$

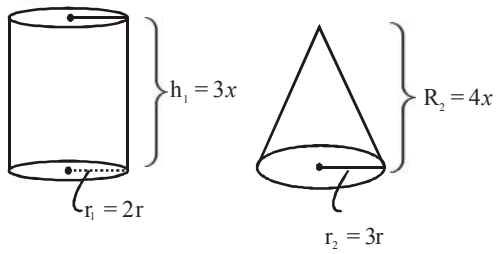
शंकु की त्रिज्या = $\sqrt{9x^2} = 3x$

$$\therefore \frac{\text{शंकु की त्रिज्या}}{\text{शंकु की ऊंचाई}} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

= 3 : 4 ⇒ **उत्तर**

अत: शंकु या बेलन की त्रिज्या एवं ऊंचाई का अनुपात 3 : 4 होगा।

हल 6. परंपरागत विधि



माना बेलन की ऊंचाई $3x$ एवं त्रिज्या 2r तथा शंकु की ऊंचाई $4x$ एवं त्रिज्या 3r है।

$$\frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{शंकु का आयतन}} = \frac{\pi(\text{त्रिज्या})^2 \times (\text{ऊंचाई})}{\frac{1}{3}\pi \times (\text{त्रिज्या})^2 \times (\text{ऊंचाई})}$$

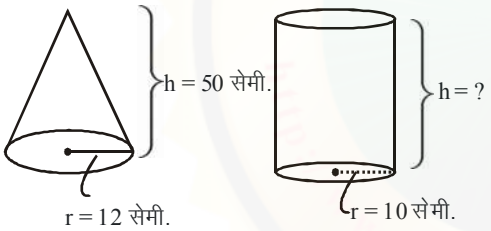
$$= \frac{\pi \times (2r)^2 \times 3x}{\frac{1}{3} \times \pi(3r)^2 \times 4x}$$

$$= \frac{3 \times 4r^2 \times 3x}{9r^2 \times 4x} = \frac{1}{1} \Rightarrow 1:1$$

⇒ उत्तर

अतः बेलन का आयतन : शंकु का आयतन = 1 : 1 अर्थात बेलन का आयतन शंकु के आयतन के बराबर है।

हल 7. सूत्र विधि



शंकु का आयतन = बेलन का आयतन

$$\frac{1}{3}\pi\ (\text{त्रिज्या})^2 \times \text{ऊंचाई} = \pi \times (\text{त्रिज्या})^2 \times \text{ऊंचाई}$$

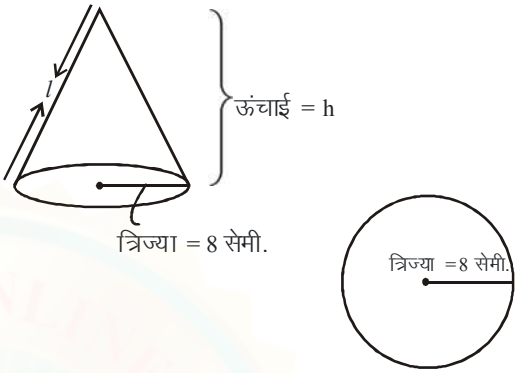
$$\frac{1}{3} \times 12 \times 12 \times 50 = 10 \times 10 \times \text{ऊंचाई}$$

$$\therefore \quad \text{ऊंचाई} = \frac{12 \times 12 \times 50}{3 \times 10 \times 10} = 24 \text{ सेमी.}$$

अतः बेलनाकार बर्तन में तरल पदार्थ की ऊंचाई 24 सेमी. है।

⇒ उत्तर

हल 8. सूत्र विधि



माना शंकु की ऊंचाई h तथा तिर्यक ऊंचाई l है।

ज्ञात है- शंकु का आयतन = गोला का आयतन

$$\frac{1}{3}\pi\ (\text{त्रिज्या})^2 \times \text{ऊंचाई} = \frac{4}{3}\pi\ (\text{त्रिज्या})^3$$

$$\frac{1}{3}\pi \times (8)^2 \times h = \frac{4}{3}\pi(8)^3$$

$$h = \frac{4 \times 8 \times 8 \times 8}{8 \times 8}$$

$$h = 32 \text{ सेमी.}$$

$$\therefore \text{ शंकु की तिर्यक ऊंचाई } (l) = \sqrt{(\text{ऊंचाई})^2 + (\text{त्रिज्या})^2}$$

$$= \sqrt{(32)^2 + (8)^2}$$

$$= \sqrt{1024 + 64}$$

$$= \sqrt{1088}$$

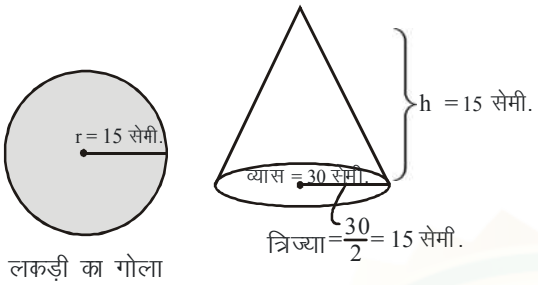
$$= \sqrt{64 \times 17}$$

$$= 8\sqrt{17} \text{ सेमी.}$$

अतः शंकु की तिर्यक ऊंचाई $8\sqrt{17}$ सेमी. है

⇒ उत्तर

हल 9. परंपरागत विधि



गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi$ (त्रिज्या)^3

$= \frac{4}{3}\pi \times 15 \times 15 \times 15$

$= 4500\,\pi$ घन सेमी.

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi$ (त्रिज्या)^2 × ऊंचाई

$= \frac{1}{3}\pi \times 15 \times 15 \times 15$

= 1125 घन सेमी.

शंकु बनने के बाद शेष बची लकड़ी या नष्ट हुई लकड़ी का

आयतन = $4500\pi - 1125\pi$

= (3375π) घन सेमी.

नष्ट हुई लकड़ी का प्रतिशत =

$$\left[\frac{\text{शेष बची लकड़ी का आयतन}}{\text{कुल लकड़ी अर्थात गोले का आयतन}} \times 100\ \%\right]$$

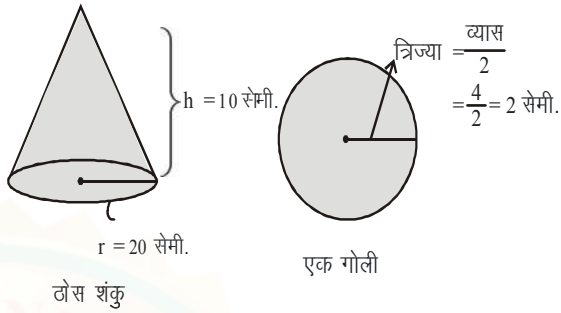
$$= \left(\frac{3375\pi}{4500\pi} \times 100\right)\%$$

$$= \left(\frac{3}{4} \times 100\right)\%$$

= 75% ⇒ **उत्तर**

अत: नष्ट हुई लकड़ी का भाग 75% है।

हल 10. परंपरागत विधि



शंकु का आयतन= $\frac{1}{3}\pi$ (त्रिज्या)^2 × ऊंचाई

$= \frac{1}{3}\pi \times (20)^2 \times 10$

$= \left(\frac{4000}{3}\pi\right)$ घन सेमी.

एक गोली का आयतन = $\frac{4}{3}\pi$ (त्रिज्या)^3

$= \frac{4}{3}\pi \times (2)^3$

$= \left(\frac{32}{3}\pi\right)$ घन सेमी.

∴ अभीष्ट गोलियों की संख्या = $\dfrac{\frac{4000}{3}\pi}{\frac{32}{3}\pi}$

$= \frac{4000}{32}$

= 125 गोली ⇒ **उत्तर**

परीक्षा प्रश्न

प्रश्न 1. एक गोलक और लंब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या 3 सेमी. है। यदि उनका आयतन समान है, तो बेलन का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल कितना है? (मान लें $\pi = \frac{22}{7}$ है)

(a) $72\frac{3}{7}$ सेमी.^{2} (b) $75\frac{3}{7}$ सेमी.^{2}

(c) $65\frac{3}{7}$ सेमी.^{2} (d) $74\frac{3}{7}$ सेमी.^{2}

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2015

उत्तर—(b)

हल : परम्परागत विधि

माना लंब वृत्तीय बेलन की ऊंचाई = h

$\therefore$ गोलक का आयतन = बेलन का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h$$

(जहां r = बेलन की त्रिज्या = गोले की त्रिज्या)

$$\frac{4}{3}\pi (3)^3 = \pi (3)^2 . h$$

$$4\pi 3^2 = \pi 3^2 . h$$

$$h = 4 \text{ सेमी.}$$

$\therefore$ बेलन का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 4 \times 3$$

$$= \frac{44}{7} \times 12 = 75\frac{3}{7} \text{ सेमी.}^2$$

प्रश्न 2. एक लंब वृत्तीय बेलन की ऊंचाई उतनी है जितनी एक गोले की त्रिज्या। दोनों का आयतन बराबर है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात है–

(a) $8+\sqrt{3} : \sqrt{3}$ (b) $4 : \sqrt{3}$

(c) $\sqrt{3} : 2$ (d) $\sqrt{3}+2 : 3$

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2012

उत्तर—(d)

हल : परम्परागत विधि

माना गोले की त्रिज्या r है।

$\therefore$ लंब वृत्तीय बेलन की ऊंचाई r होगी।

माना बेलन की त्रिज्या r_1 है।

$\therefore$ बेलन का आयतन = गोले का आयतन

$$\pi r_1^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r_1^2 = \frac{4}{3}r^2$$

$$\therefore \frac{r_1^2}{r^2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \left(\frac{r_1}{r}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad .....(i)$$

$$\therefore \frac{\text{बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल}}{\text{गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल}} = \frac{2\pi r_1(h+r_1)}{4\pi r^2}$$

$$= \frac{r_1(h+r_1)}{2r^2}$$

$$= \frac{2r}{\sqrt{3}} \times \frac{r+r_1}{2r^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\left(r+\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)}{2r}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r\left(\sqrt{3}+2\right)}{r\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2}{3} = \left(\sqrt{3}+2\right) : 3$$

प्रश्न 3. आधार त्रिज्या 7 सेमी. और ऊंचाई 20 सेमी. वाले लंब वृत्तीय बेलन का कुल सतह क्षेत्रफल कितना होगा?

(a) 1188 सेमी.^{2} (b) 140 सेमी.^{2}

(c) 900 सेमी.^{2} (d) 1000 सेमी.^{2}

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2015

उत्तर—(a)

हल : सूत्र विधि

दिया है : r = 7 सेमी. तथा h = 20 सेमी.

लंब वृत्तीय बेलन का सतह क्षेत्रफल $= 2\pi r (r + h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7\,(7 + 20)$

$= 44 \times 27$

$= 1188$ सेमी.^{2}

प्रश्न 4. एक खोखले गोलाकार खोल के आंतरिक तथा बाह्य पृष्ठों के व्यास क्रमशः 6 सेमी. तथा 10 सेमी. हैं। यदि इस खोल को पिघलाकर $\frac{8}{3}$ सेमी. लंबाई वाला एक ठोस बेलन बना दिया जाए, तो उस बेलन का व्यास कितना होगा?

(a) 14 सेमी. (b) 16 सेमी.

(c) 7 सेमी. (d) 10 सेमी.

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2010

उत्तर—(a)

हल : सूत्र विधि

माना बेलन की त्रिज्या r है।

$\therefore$ गोले के पिछले भाग का आयतन = बेलन का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi(5^3 - 3^3) = \pi r^2 \frac{8}{3}$$

$$\frac{4}{3}\pi(125 - 27) = \frac{8}{3}\pi r^2$$

$$98\pi = 2\pi r^2$$

$$\therefore\ r^2 = 49$$

$$r = 7 \text{ सेमी.}$$

$\therefore$ बेलन का व्यास $= 2 \times r$

$= 2 \times 7$

$= 14$ सेमी.

प्रश्न 5. प्रति 1 सेमी. लंबे किनारों वाले नियमित त्रिभुजीय पिरामिड का कुल सतह क्षेत्रफल कितना होगा?

(a) $4\sqrt{3}$ सेमी.^{2} (b) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ सेमी.^{2}

(c) $\sqrt{3}$ सेमी.^{2} (d) 4 सेमी.^{2}

S.S.C. C.P.O. परीक्षा, 2015

उत्तर—(c)

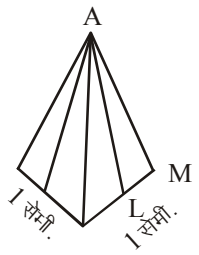
हल : सूत्र विधि

नियमित त्रिभुजीय पिरामिड का आधार = समबाहु त्रिभुज

$\therefore$ आधार का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

[प्रत्येक भुजा = 1 सेमी.]

पिरामिड की तिरछी ऊंचाई $AL^2 = AM^2 - LM^2$



$= 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore\ AL = \frac{\sqrt{3}}{2}$

आधार का परिमाप = 1 + 1 + 1 = 3 सेमी.

$\therefore$ तिरछा पृष्ठ $= \frac{1}{2} \times$ आधार का परिमाप $\times$ तिरछी ऊंचाई

$= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

अतः पिरामिड का कुल क्षे. = तिरछा पृष्ठ + आधार का क्षे.

$= \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ सेमी.^{2}

प्रश्न 6. एक लंब पिरामिड का आधार 10 सेमी. भुजा का वर्ग है। यदि पिरामिड की ऊंचाई 12 सेमी. है, तो कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना होगा?

(a) 360 सेमी.^{2} (b) 460 सेमी.^{2}

(c) 400 सेमी.^{2} (d) 260 सेमी.^{2}

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2015

उत्तर—(a)

हल : सूत्र विधि

लंब पिरामिड के आधार का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल

$= (10)^2$

$= 100$ सेमी.^{2}

चित्र से $PQ = \frac{DE}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow 5$ सेमी.

प्रश्न में दिया है

$AP = 12$ सेमी.

$\therefore$ तिरछी ऊंचाई $= AQ$

$\therefore \quad AQ^2 = AP^2 + PQ^2$

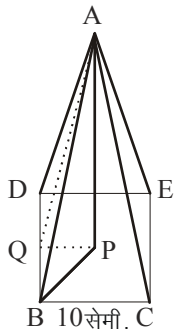
$= 12^2 + 5^2$

$= 144 + 25$

$= 169$

$\therefore \quad AQ = \sqrt{169}$

$= 13$ सेमी.



$\therefore$ तिरछा पृष्ठ $= \frac{1}{2} \times$ आधार का परिमाप $\times$ तिरछी ऊंचाई

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 10 \times 13$

$= 260$

$\therefore$ कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = पिरामिड का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= तिरछा पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल

$= 260 + 100 \Rightarrow 360$ सेमी.^{2}

प्रश्न 7. 48 मी. लंबी, 16.5 मी. चौड़ी और 4 मी. गहरी खाई के कितने भाग को 4 मी. व्यास और 56 मी. लंबी बेलनाकार सुरंग की खुदाई से निकले पत्थर और मिट्टी से भरा जा सकता है? (मान लें $\pi = \frac{22}{7}$ है)

(a) $\frac{1}{2}$ भाग (b) $\frac{1}{4}$ भाग

(c) $\frac{2}{9}$ भाग (d) $\frac{1}{9}$ भाग

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2015

उत्तर—(c)

हल : सूत्र विधि

अभीष्ट भरा गया भाग

$= \frac{\text{बेलनाकार सुरंग का आयतन}}{\text{घनाभ के आकार की खाई का आयतन}}$

$= \frac{\pi r^2 h_1}{l b h} \Rightarrow \frac{\frac{22}{7} \times 2^2 \times 56}{48 \times 16.5 \times 4}$

$= \frac{22 \times 4 \times 8}{48 \times 16.5 \times 4} \Rightarrow \frac{2}{9}$ भाग

प्रश्न 8. 5 व्यक्ति एक टेंट में रहेंगे। यदि प्रत्येक व्यक्ति को 16 मी.^{2} फर्शी क्षेत्र और वायु के लिए 100 मी.^{3} के अंतराल की आवश्यकता है तो उन व्यक्तियों को उसमें जगह देने के लिए लघुत्तम आकार के शंकु की ऊंचाई कितनी होगी?

(a) 18.75 मी. (b) 16 मी.

(c) 10.25 मी. (d) 20 मी.

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-I) परीक्षा, 2015

उत्तर—(a)

हल : सामान्य समझ पर

निष्कर्ष 1.

$\because$ प्रत्येक व्यक्ति को 16 मीटर^2 फर्शी क्षेत्र की आवश्यकता है।

निष्कर्ष 2.

$\therefore$ 5 व्यक्तियों को आवश्यक क्षेत्र $= 16 \times 5 \Rightarrow 80$ मीटर^2

तथा 5 व्यक्तियों के लिए आवश्यक वायु का आयतन $= 100 \times 5$

$= 500$ मी.^{3}

निष्कर्ष 3. शंक्वाकार टेंट का आयतन $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$500 = \frac{1}{3}(\pi r^2)h$

(जहां $\pi r^2 =$ शंकु का क्षेत्रफल तथा शंकु की ऊंचाई $= h$)

$500 = \frac{1}{3} \times 80 \times h$

($\therefore \pi r^2 = 80$ रखने पर)

$h = \frac{500 \times 3}{80} \Rightarrow 18.75$ मीटर

प्रश्न 9. एक 48 मी. लंबी और 31.5 मी. चौड़ी निम्न भूमि को 6.5 dm ऊंचा किया जाता है। इसके लिए मिट्टी को भूमि के पार्श्व में खोदे गए 27 मी. लंबे और 18.2 मी. चौड़े घनाकार विवर से निकाला जाता है। विवर की गहराई कितनी होगी?

(a) 2.5 मी. (b) 2 मी.

(c) 3 मी. (d) 2.2 मी.

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2015

उत्तर—(b)

हल : परम्परागत विधि

माना विवर की गहराई = h

प्रश्नानुसार, दोनों आकृति घनाकार हैं।

$$\therefore 48 \times 31.5 \times \frac{6.5}{10} = 27 \times 18.2 \times h$$

$$(\because 1\text{dm} = \frac{1}{10} \text{ मीटर})$$

$$\therefore h = \frac{48 \times 31.5 \times 6.5}{27 \times 18.2 \times 10} \Rightarrow 2 \text{ मीटर}$$

प्रश्न 10. किसी लंब प्रिज्म का आधार त्रिभुज हो जिसकी भुजाएं 3 : 4 : 5 के अनुपात में हैं और पार्श्व सतह 144 सेमी.^{2} है। यदि प्रिज्म की लंबाई 6 सेमी. है, तो उसका आयतन (सेमी.^{3} में) कितना होगा?

(a) 120 (b) 144

(c) 160 (d) 184

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2012, 2014

उत्तर—(b)

हल : परम्परागत विधि

माना प्रिज्म की आधार की भुजा क्रमशः $3x, 4x$ और $5x$ है।

$$\because (5x)^2 = (3x)^2 + (4x)^2$$

$$25x^2 = 9x^2 + 16x^2$$

$$25x^2 = 25x^2$$

$\because$ यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर हो तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।

$\therefore$ समकोण त्रिभुज का क्षे. $= \frac{1}{2} \times$ लंबवत भुजाओं का गुणनफल

$$= \frac{1}{2} \times 3x \times 4x \Rightarrow 6x^2$$

तथा त्रिभुज का परिमाप = भुजाओं का योग

$$= 3x + 4x + 5x = 12x$$

$\therefore$ प्रिज्म का पार्श्व पृष्ठ = आधार का परिमाप × ऊंचाई

$$144 = 12x \times 6$$

$$x = \frac{144}{72} \Rightarrow 2 \text{ सेमी.}$$

$\therefore$ प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$$= 6x^2 \times 6$$

$$= 6 \times 2^2 \times 6 \quad (\because x = 2)$$

$$= 144 \text{ सेमी.}^3$$

प्रश्न 11. 8 सेमी. 4 सेमी. × 2 सेमी. आयाम वाले एक ठोस घनाभ को गलाकर 2 सेमी. की कोर वाले समान घनों में ढाला जाता है। इन समान घनों की संख्या कितनी होगी?

(a) 8 (b) 4

(c) 10 (d) 16

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2015

उत्तर—(a)

हल : सूत्र विधि

$$\text{अभीष्ट घनों की संख्या} = \frac{\text{घनाभ का आयतन}}{1 \text{ घन का आयतन}}$$

$$= \frac{8 \times 4 \times 2}{(2)^3}$$

$$= \frac{64}{8} \Rightarrow 8$$

प्रश्न 12. एक घन के प्रत्येक पार्श्व को 25% घटा दिया जाता है। मूल घन और परिणामी घन के आयतन का अनुपात ज्ञात करें।

(a) 27 : 64 (b) 64 : 27

(c) 8 : 1 (d) 64 : 1

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2015

उत्तर—(b)

हल : परम्परागत विधि

माना घन की प्रत्येक पार्श्व कोर a है

$\therefore$ घन का आयतन = a^3

घन की पार्श्वकोर 25% घटाने पर नई पार्श्वकोर

$$= a \times \frac{(100 - 25)}{100}$$

$$= \frac{75a}{100} \Rightarrow \frac{3}{4}a$$

$$\therefore \text{ घन का नया आयतन} = \left(\frac{3}{4}a\right)^3 \Rightarrow \frac{27}{64}a^3$$

$\therefore$ मूलघन और नए घन के आयतनों के बीच अनुपात

$$= a^3 : \frac{27}{64}a^3$$
$$= \frac{64}{64} : \frac{27}{64}$$
$$= 64 : 27$$

पूर्णांक विधि

माना घन की प्रत्येक पार्श्व कोर 100 इकाई है

$\therefore$ घन की पार्श्व कोर को 25% घटाने पर = 75 इकाई

$\therefore$ मूलघन एवं नये घन के आयतनों का अनुपात $= \frac{(100)^3}{(75)^3}$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Rightarrow 64:27$$

प्रश्न 13. यदि एक गोलार्द्ध को गलाकर समान आयतन के चार गोलक बनाए जाते हैं, तो प्रत्येक गोलक की त्रिज्या किसके बराबर होगी?

(a) गोलार्द्ध की त्रिज्या का 1/4
(b) गोलार्द्ध की त्रिज्या का 1/6
(c) गोलार्द्ध की त्रिज्या
(d) गोलार्द्ध की त्रिज्या का 1/2

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2015

उत्तर—(d)

हल : परम्परागत विधि

माना गोलार्द्ध की त्रिज्या r है।

$\therefore$ गोलार्द्ध का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

माना समान आयतन के चार गोलों में प्रत्येक की त्रिज्या r_1 है।

प्रश्नानुसार

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = 4 \times \frac{4}{3}\pi r_1^3$$
$$r_1^3 = \frac{2\pi r^3 \times 3}{3 \times 16 \times \pi}$$
$$r_1^3 = \left(\frac{r}{2}\right)^3 \Rightarrow r_1 = \frac{r}{2}$$

अतः प्रत्येक गोले की त्रिज्या = गोलार्द्ध की त्रिज्या का $\frac{1}{2}$

प्रश्न 14. दो ठोस लोहे के गोलकों की त्रिज्या क्रमशः 1 सेमी. और 6 सेमी. हैं। दोनों गोलकों को गलाकर एक खोखला गोलक बनाया जाता है। यदि खोखले गोलक की बाह्य त्रिज्या 9 सेमी. है, तो इसकी मोटाई (सेमी. में) कितनी है?

(a) 0.5 (b) 2
(c) 1 (d) 1.5

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2015

उत्तर—(c)

हल : परम्परागत विधि

माना खोखले गोले की आंतरिक त्रिज्या = r

प्रश्नानुसार

दो ठोस गोले का आयतन = खोखले गोले का आयतन

$$\therefore \frac{4}{3}\pi(1)^3 + \frac{4}{3}\pi(6)^3 = \frac{4}{3}\pi(9^3 - r^3)$$
$$\frac{4}{3}\pi(1^3 + 6^3) = \frac{4}{3}\pi(729 - r^3)$$
$$1 + 216 = 729 - r^3$$
$$r^3 = 729 - 217 = 512$$
$$r^3 = 8^3$$
$$r = 8 \text{ सेमी.}$$

$\therefore$ खोखले गोले की मोटाई = बाह्य त्रिज्या – आंतरिक त्रिज्या

$= 9 - 8 \Rightarrow 1$ सेमी.

प्रश्न 15. 20 सेमी. ऊंचे और 15 सेमी. आधार त्रिज्या वाले एक लंब-वृत्तीय शंकु को गलाया जाता है और उसे 5 सेमी. ऊंचे तथा 1.5 सेमी. आधार त्रिज्या वाले समान आकार के छोटे-छोटे शंकुओं में ढाला जाता है। ढले हुए शंकुओं की संख्या कितनी होगी?

(a) 100 (b) 150
(c) 300 (d) 400

S.S.C. कांस्टेबल (G.D.) परीक्षा, 2015

उत्तर—(d)

हल : सूत्र विधि

ढाले गए शंकुओं की अभीष्ट संख्या $= \frac{\text{बड़े शंकु का आयतन}}{\text{छोटे शंकु का आयतन}}$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times\pi\times(15)^2\times 20}{\frac{1}{3}\times\pi(1.5)^2\times 5}$$

($\because$ बड़े शंकु की त्रिज्या 15 सेमी. और ऊंचाई 20 सेमी. है तथा छोटे शंकु की त्रिज्या 1.5 सेमी. और ऊंचाई 5 सेमी. है)

$$= \frac{225\times 20}{2.25\times 5} \Rightarrow 400$$

प्रश्न 16. 21 सेमी. ऊंचे और 5 सेमी. की आधार त्रिज्या वाले लंब वृत्तीय सिलेंडर का आयतन कितना होगा?

(a) 1255 सेमी.^{3} (b) 1650 सेमी.^{3}
(c) 1175 सेमी.^{3} (d) 1050 सेमी.^{3}

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2015

उत्तर—(b)

हल : सूत्र विधि

लंब वृत्तीय बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

(जहां r बेलन की त्रिज्या तथा h बेलन की ऊंचाई)

$$= \frac{22}{7}\times 5^2\times 21$$

$= 1650$ सेमी.^{3}

प्रश्न 17. एक लंब वृत्तीय बेलन के आधार का परिमाप a एकक है। तदनुसार, यदि उस बेलन का आयतन V घन एकक हो, तो बेलन की ऊंचाई कितनी होगी?

(a) $\frac{4a^2V}{\pi}$ एकक (b) $\frac{4\pi a^2}{V}$ एकक
(c) $\frac{\pi a^2 V}{4}$ एकक (d) $\frac{4\pi V}{a^2}$ एकक

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-I) परीक्षा, 2013

उत्तर—(d)

हल : परम्परागत विधि

बेलन के आधार का परिमाप $= 2\pi r$

प्रश्नानुसार

$2\pi r = a$

$\therefore r = \frac{a}{2\pi}$ .....(i)

माना बेलन की ऊंचाई h है।

$\therefore$ बेलन का आयतन $V = \pi r^2 h$

$$= \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 h$$

$$\therefore h = \frac{V\times 4\pi^2}{\pi a^2} \Rightarrow \frac{4\pi V}{a^2} \text{ एकक}$$

प्रश्न 18. ऐसे वृहत्तम लंब वृत्तीय शंकु का आयतन क्या होगा जिसे 7 सेमी. की कोर वाले घन में से काटा जा सकता है? ($\pi = \frac{22}{7}$ लें)

(a) 13.6 सेमी.^{3} (b) 121 सेमी.^{3}
(c) 147.68 सेमी.^{3} (d) 89.8 सेमी.^{3}

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2015

उत्तर—(d)

हल : सामान्य समझ पर

निष्कर्ष 1. घन में से काटे जाने वाले वृहत्तम शंकु का व्यास = ऊंचाई = घन की भुजा

$\therefore$ शंकु की त्रिज्या $= \frac{7}{2} = 3.5$ सेमी. तथा ऊंचाई = 7.0 सेमी.

निष्कर्ष 2. $\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(3.5)^2\times 7$$

$$= \frac{22}{3}\times 12.25 = 89.8 \text{ घन सेमी.}$$

प्रश्न 19. ऐसे लंब वृत्तीय शंकु का आयतन जिसे 4.2 dm कोर के लकड़ी के घन से बनाया गया हो और जिसमें कम से कम लकड़ी व्यर्थ हुई हो, है-

(a) 194.04cu. dm (b) 19.404cu. dm
(c) 1940.4cu. dm (d) 19404cu. dm

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2015

उत्तर—(b)

हल : सूत्र विधि

अधिकतम आयतन के शंकु के लिए ऊंचाई = घन की भुजा = 4.2 dm

तथा शंकु की त्रिज्या $= \frac{\text{घन की भुजा}}{2}$

$= \frac{4.2}{2} = 2.1\,dm$

$\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^2 \times 4.2$

$= \frac{22}{21} \times 2.1 \times 2.1 \times 4.2$

$= 19.404$ cu. dm

प्रश्न 20. एक लंब प्रिज्म का आधार त्रिभुजाकार है जिसकी भुजाएं 13 सेमी., 20 सेमी. और 21 सेमी. हैं। यदि प्रिज्म का शीर्ष लंब 9 सेमी. है, तो उसका आयतन कितना होगा?

(a) 1134 सेमी.^{3} (b) 1413 सेमी.^{3}

(c) 1143 सेमी.^{3} (d) 1314 सेमी.^{3}

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2015

उत्तर—(a)

हल : सूत्र विधि

$\because$ लंब प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$\because$ लंब प्रिज्म का आधार त्रिभुज है।

$\left(\because S = \frac{a+b+c}{2}\right.$ जहां $a = 13, b = 20, c = 21$

$\therefore S = \frac{13+20+21}{2} = 27$

$\because$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \sqrt{27(27-13)(27-20)(27-21)}$

$= \sqrt{27 \times 14 \times 7 \times 6}$

$= 126$ वर्ग सेमी.

$\therefore$ लंब प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$= 126 \times 9$

$= 1134$ सेमी.^{3}

प्रश्न 21. यदि V_1, V_2 और V_3 ऐसे लंब वृत्तीय शंकु, गोलक और लंब वृत्तीय बेलन के आयतन हैं, जिनकी त्रिज्या और ऊंचाई समान है, तो-

(a) $V_1 = \frac{V_2}{2} = \frac{V_3}{3}$ (b) $\frac{V_1}{2} = \frac{V_2}{3} = V_3$

(c) $\frac{V_1}{3} = \frac{V_2}{2} = V_3$ (d) $\frac{V_1}{3} = V_2 = \frac{V_3}{2}$

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2014

उत्तर—(a)

हल : परम्परागत विधि

माना बेलन, शंकु तथा गोले के त्रिज्या r है तथा उनकी ऊंचाई h है।

$\therefore$ लंब वृत्तीय शंकु का आयतन $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\therefore 3V_1 = \pi r^2 h$ ..... (i)

गोलक का आयतन $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore \frac{3}{4}V_2 = \pi r^2 . r$

$\therefore \frac{3}{4}V_2 = \frac{\pi r^2 . 2r}{2}$

($\because$ गोले की ऊंचाई = त्रिज्या का दोगुना होता है।)

$\frac{3}{2}V_2 = \pi r^2 h$ ..... (ii)

तथा लंब वृत्तीय बेलन का आयतन $v_3 = \pi r^2 h$

$\therefore V_3 = \pi r^2 h$ ..... (iii)

समी. (i), समी. (ii) और समी. (iii) से

$3V_1 = \frac{3}{2}V_2 = V_3$

$\therefore V_1 = \frac{V_2}{2} = \frac{V_3}{3}$

प्रश्न 22. यदि एक लंब प्रिज्म का पृष्ठीय क्षेत्रफल, आयतन, ऊंचाई, आधार-क्षेत्रफल और परिमाप क्रमशः S वर्ग यूनिट, V घन यूनिट, h यूनिट, A वर्ग यूनिट और P यूनिट हो तो-

(a) $P = AVS$ (b) $SP = AV$

(c) $V = \frac{AP}{S}$ (d) $A = \frac{VP}{S}$

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2015

उत्तर—(d)

हल : सूत्र विधि

लंब प्रिज्म का पृष्ठीय क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊंचाई

$$S = P \times h$$
$$S = Ph$$

या $h = S/P$ ..... (i)

तथा लंब प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$$V = A \times h$$

$$\therefore h = \frac{V}{A}$$

$$\frac{S}{P} = \frac{V}{A}$$ (समी. (i) से $h = \frac{S}{P}$ रखने पर)

$$\therefore SA = VP$$

$$A = \frac{VP}{S}$$

प्रश्न 23. 10 सेमी. ऊंचाई वाले प्रिज्म का आधार वर्गाकार है। प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 192 वर्ग सेमी. है। प्रिज्म का आयतन है-

(a) 640 सेमी.^{3} (b) 90 सेमी.^{3}

(c) 120 सेमी.^{3} (d) 160 सेमी.^{3}

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2015

उत्तर—(d)

हल : परम्परागत विधि

माना प्रिज्म के आधार की भुजा a है।

$\because$ प्रिज्म का आधार वर्गाकार है।

$\therefore$ वर्गाकार आधार का क्षेत्रफल $= a^2$

तथा आधार का परिमाप = वर्ग का परिमाप = 4a

$\therefore$ प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= पार्श्व पृष्ठ + 2 × आधार का क्षेत्रफल

= आधार का परिमाप × ऊंचाई + 2 × आधार का क्षेत्रफल

$$192 = 4a \times 10 + 2 \times a^2$$
$$192 = 40a + 2a^2$$
$$\therefore a^2 + 20a - 96 = 0$$
$$a^2 + 24a - 4a - 96 = 0$$
$$a(a+24) - 4(a+24) = 0$$
$$(a+24)(a-4) = 0$$
$$a = -24 \text{ या } a = 4$$

$\therefore$ प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$$= a^2 \times 10$$
$$= (4)^2 \times 10 \quad (\therefore a = 4)$$
$$= 16 \times 10 = 160 \text{ सेमी.}^3$$

प्रश्न 24. एक लंब पिरामिड का आधार वर्गाकार है जिसका क्षेत्रफल 324 वर्ग मीटर है। यदि पिरामिड का आयतन 1296 घन मीटर है, तो तिरछी सतह का क्षेत्रफल (m^2 में) कितना है ?

(a) 432 (b) 1080

(c) 360 (d) 540

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2014

उत्तर—(d)

हल : सूत्र विधि

पिरामिड का आयतन = $\frac{1}{3}$ × आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

माना वर्गाकार आधार की भुजा = b

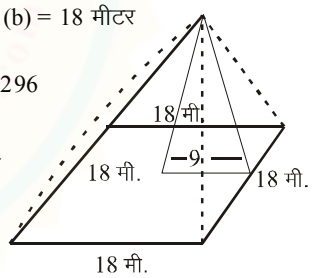
$\therefore$ वर्गाकार आधार का क्षेत्रफल $= (b^2) = 324$

$\therefore$ आधार की भुजा (b) = 18 मीटर

$$\therefore \frac{1}{3} \times 324 \times h = 1296$$

$$\therefore h = \frac{1296 \times 3}{324}$$

$\therefore$ h = 12 मी.



अत: पिरामिड की तिरछी ऊंचाई $l = \sqrt{12^2 + 9^2}$ (चित्र से)

$$= \sqrt{144 + 81}$$
$$= \sqrt{225} \Rightarrow 15 \text{ मी.}$$

अत: पिरामिड की तिरछी सतह का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$ × आधार का परिमाप × तिरछी ऊंचाई

($\because$ आधार का परिमाप = 4a = 4 × 18 ⇒ 72)

$$= \frac{1}{2} \times 72 \times 15 \Rightarrow 540 \text{ मी.}^2$$

प्रश्न 25. एक सम वृत्तीय शंकु जिसकी ऊंचाई 21 सेमी. है और तल की त्रिज्या 154 सेमी.^{2} क्षेत्रफल के वृत्त की त्रिज्या है, तो उसके आयतन का $\frac{2}{3}$ कितना होगा?

(a) $726\frac{3}{2}$ सेमी.^{3} (b) $627\frac{2}{3}$ सेमी.^{3}

(c) $817\frac{3}{2}$ सेमी.^{3} (d) $718\frac{2}{3}$ सेमी.^{3}

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-I) परीक्षा, 2014

उत्तर—(d)

हल : सूत्र विधि

शंकु की त्रिज्या = वृत्त की त्रिज्या

माना वृत्त की त्रिज्या r है।

$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

$\therefore \pi r^2 = 154$

$r^2 = 154 \times \frac{7}{22}$

$\therefore r = \sqrt{49} \Rightarrow 7$ सेमी.

$\therefore$ शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 49 \times 21$

$= 22 \times 49 \Rightarrow 1078$ सेमी.^{3}

$\therefore$ शंकु के आयतन का $\frac{2}{3}$ भाग = $\frac{2}{3} \times 1078$

$= \frac{2156}{3}$

$= 718\frac{2}{3}$ सेमी.^{3}

प्रश्न 26. 6 मी. ऊंचे एक राइट पिरामिड का आधार एक वर्ग है जिसका विकर्ण $\sqrt{1152}$ मी. है। पिरामिड का आयतन है–

(a) 576 मी.^{3} (b) 1152 मी.^{3}

(c) 144 मी.^{3} (d) 288 मी.^{3}

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-I) परीक्षा, 2014

उत्तर—(b)

हल : सूत्र विधि

$\because$ पिरामिड का आधार वर्ग है।

$\therefore$ वर्ग का क्षेत्रफल = $\frac{\text{विकर्ण}^2}{2}$

$= \frac{(\sqrt{1152})^2}{2}$

$= \frac{1152}{2} \Rightarrow 576$ मी.^{2}

$\therefore$ पिरामिड का आयतन = $\frac{1}{3}$ × आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

$= \frac{1}{3} \times 576 \times 6 \Rightarrow 1152$ मीटर^3

प्रश्न 27. एक तल लंब वृत्तीय शंकु को समान आयतन वाले दो भागों में विभाजित करता है। यदि तल आधार के समांतर हो तो शंकु की ऊंचाई को किस अनुपात में विभाजित किया जाएगा?

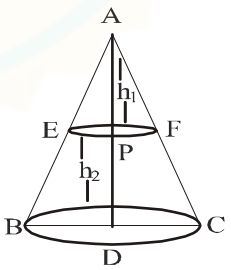
(a) $1:\sqrt{2}$ (b) $1:\sqrt[3]{2}$

(c) $1:\sqrt[3]{2}+1$ (d) $1:\sqrt[3]{2}-1$

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2015

उत्तर—(d)

हल : परम्परागत विधि



माना शंकु को दो समान आयतन में बिंदु EF से काटा गया है।

प्रश्नानुसार

$$\frac{1}{3}\pi r_1^2 \times (h_1 + h_2) = 2 \times \frac{1}{3}\pi r_2^2 \times h_1$$

$$(h_1 + h_2)^{r_1^2} = 2r_2^2 h_1$$

$$\therefore \frac{h_1+h_2}{h_1} = 2\frac{r_2^2}{r_1^2} \quad .....(i)$$

पुनः चित्र से

Δ ABD तथा Δ APE में

Δ ABD समरूप त्रिभुज Δ APE

$$\therefore \frac{AP}{PE} = \frac{AD}{BD}$$

$$\frac{h_1}{r_2} = \frac{h_1+h_2}{r_1}$$

$$\therefore \frac{r_2}{r_1} = \frac{h_1}{h_1+h_2}$$

समी. (i) में $\frac{r_2}{r_1}$ का मान रखने पर

$$\frac{h_1+h_2}{h_1} = 2\times\left(\frac{h_1}{h_1+h_2}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{h_1+h_2}{h_1}\right)^3 = \frac{2}{1}$$

$$\left(1+\frac{h_2}{h_1}\right)^3 = 2$$

$$1+\frac{h_2}{h_1} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{h_2}{h_1} = 2^{\frac{1}{3}}-1$$

$$\therefore \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$$

$\therefore$ अभीष्ट अनुपात $= h_1 : h_2$

$= 1 : \sqrt[3]{2}-1$

प्रश्न 28. यदि किसी बेलन के अर्द्धव्यास को 50% कम कर के तथा उसकी ऊंचाई को 50% बढ़ाकर एक नया बेलन बनाया जाए, तो नए बेलन के आयतन में कितनी कमी होगी?

(a) 0% (b) 25%
(c) 62.5% (d) 75%

S.S.C. C.P.O. परीक्षा, 2003

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2014

उत्तर—(c)

हल : परम्परागत विधि

माना प्रारंभिक बेलन का अर्द्धव्यास r एवं ऊंचाई h है।

$\therefore$ आयतन $= \pi r^2 h$

त्रिज्या में 50% की कमी करने पर नई त्रिज्या $= r - r$ का $\frac{50}{100}$

$= r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$

ऊंचाई में 50% की वृद्धि से नई ऊंचाई $= h + h$ का $\frac{50}{100}$

$= h + \frac{h}{2}$

$= \frac{3h}{2}$

$\therefore$ नया आयतन $= \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \frac{3h}{2}$

$= \pi\frac{r^2}{4}\cdot\frac{3h}{2} \Rightarrow \frac{3}{8}\pi r^2 h$

आयतन में कमी $= \pi r^2 h - \frac{3}{8}\pi r^2 h = \frac{5}{8}\pi r^2 h$

$\therefore$ % कमी $= \frac{5/8\pi r^2 h}{\pi r^2 h}\times 100$

$= \frac{5\times 100}{8} = \frac{500}{8} \Rightarrow 62.5\%$ कमी

गुणा भाग विधि

	त्रिज्या	×	त्रिज्या	×	ऊंचाई	=	बेलन का आयतन
	↓		↓		↓		↓
पूर्व →	10	×	10	×	10	=	1000 घन इकाई
परिवर्तित →	5	×	5	×	15	=	375 घन इकाई

स्पष्ट है बेलन का आयतन 1000 घन इकाई से घटकर 375 घन इकाई हो गया। यानी आयतन में कमी $= 1000 - 375$

$= 625$ घन इकाई

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत कमी $= \frac{625}{1000}\times 100 = 62.5\%$

प्रश्न 29. यदि एक तार के अनुप्रस्थ-खंड का व्यास 5% घटा दिया जाए, तो उसकी लंबाई को कितने प्रतिशत बढ़ाना होगा, ताकि उसका आयतन पहले जैसा रहे?

(a) 20% (b) 20.8%

(c) 10.8% (d) 10%

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2013

उत्तर—(c)

हल : परम्परागत विधि

माना तार के अनुप्रस्थ खंड का व्यास = 2r

$\therefore$ तार की त्रिज्या = r

$\therefore$ तार का आयतन $= \pi r^2 h$ ..... (i)

(जहां h तार की लंबाई है।)

तार के व्यास को 5% घटाने पर $= 2r\frac{(100-5)}{100}$

$= 2r \times \frac{95}{100} \Rightarrow 2r \times \frac{19}{20}$

$\therefore$ 5% घटाने पर तार की त्रिज्या $= r \times \frac{19}{20}$

माना तार की लंबाई को x% बढ़ाने पर आयतन समान रहता है।

$\therefore$ समी. (i) से $\pi r^2 h = \pi\left(\frac{r \times 19}{20}\right)^2 \times h\left(\frac{100+x}{100}\right)$

$$\pi r^2 h = \pi r^2 \frac{19^2}{20^2} \times h\left(\frac{100+x}{100}\right)$$

$$1 = \frac{19^2}{20^2} \times \left(\frac{100+x}{100}\right)$$

$$\frac{400}{361} = \frac{100+x}{100}$$

$$\frac{400}{361} = 1 + \frac{x}{100}$$

$$\frac{39}{361} = \frac{x}{100}$$

$$x = \frac{39 \times 100}{361} \Rightarrow 10.8\%$$

प्रश्न 30. यदि किसी शंकु के आधार के क्षेत्रफल को 100% बढ़ा दिया जाए, तो आयतन कितना बढ़ जाएगा?

(a) 200% (b) 141%

(c) 100% (d) 182%

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2014

उत्तर—(c)

माना शंकु के आधार का क्षेत्रफल A तथा ऊंचाई h है।

$\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \times A \times h$ .....(i)

$\therefore$ आधार के क्षेत्रफल में 100% वृद्धि के बाद आयतन

$$= \frac{1}{3} \times A\left(\frac{100+100}{100}\right) \times h = \frac{2}{3} \times A \times h$$

$\therefore$ अभीष्ट % वृद्धि $= \frac{\left(\frac{2}{3}Ah - \frac{1}{3}Ah\right)}{\frac{1}{3}Ah} \times 100 \Rightarrow 100\%$

गुणा भाग विधि

आधार का क्षे. × ऊंचाई = शंकु का आयतन

↓ ↓ ↓

पूर्व → 10 × 10 = 100 घन इकाई

परिवर्तित → 20 × 10 = 200 घन इकाई

स्पष्ट है शंकु का आयतन 100 घन इकाई से बढ़कर 200 घन इकाई हो गया यानी 200 – 100 = 100 घन इकाई की वृद्धि हुई

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत वृद्धि $= \frac{100}{100} \times 100 = 100\%$

प्रश्न 31. m सेमी. त्रिज्या वाली एक स्टील की गेंद को गलाकर h ऊंचाई वाले एक शंकु में परिवर्तित कर दिया जाता है, तो शंकु की त्रिज्या होगी-

(a) $2m\sqrt{\frac{m}{h}}$ (b) $m\sqrt{\frac{m}{h}}$

(c) $\sqrt{\frac{m^3}{h}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

D.M.R.C. (J.S.C.) परीक्षा, 2003

उत्तर—(a)

हल : परम्परागत विधि

प्रश्नानुसार

स्टील की गेंद का आयतन = शंकु का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi m^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\therefore \quad r^2 = \frac{4\pi m^3 \times 3}{3 \times h \times \pi} \Rightarrow \frac{4m^3}{h}$$

$$r = 2m\sqrt{\frac{m}{h}}$$

प्रश्न 32. यदि किसी घन की प्रत्येक भुजा को दोगुना कर दिया जाए, तो उसका आयतन क्या होगा?

(a) दोगुना (b) चौगुना

(c) छः गुना (d) आठ गुना

R.R.B. भुवनेश्वर (ग्रुप-D) परीक्षा, 2007

उत्तर–(d)

हल : सामान्य समझ पर

माना घन की भुजा a है।

$\therefore$ घन का आयतन = a^3 .....(i)

पुनः घन की भुजा दोगुनी करने पर घन का आयतन = $(2a)^3$

= $8a^3$ .....(ii)

अतः समी. (i) और (ii) से स्पष्ट है कि भुजा दोगुनी करने पर आयतन आठ गुना हो जाएगा।

प्रश्न 33. एक शंक्वाकार तंबू की ऊंचाई 14 मी. तथा उसके फर्श का क्षेत्रफल 346.5 वर्गमीटर है, इसे बनाने में लगने वाले 1.1 मी. चौड़े कपड़े की लंबाई है :

$\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

(a) 490 मी. (b) 525 मी.

(c) 665 मी. (d) 860 मी.

U.P. Lower(Pre) 2013

उत्तर–(b)

हल : परम्परागत विधि

$\because$ शंकु का फर्श उसका आधार अर्थात वृत्त होगा।

[illegible] = फर्श का क्षेत्रफल

= 346.5 मीटर^2

$\therefore$ $346.5 = \pi r^2$

$$346.5 = \frac{22}{7} \times r^2$$

$$r^2 = \frac{346.5 \times 7}{22} \Rightarrow 110.25$$

$$r = 10.5$$

तिरछी ऊंचाई $(l) = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$= \sqrt{(10.5)^2 + (14)^2}$$

$$= \sqrt{110.25 + 196}$$

= 17.5 मीटर

शंकु का वक्र पृष्ठ या कपड़े का क्षेत्रफल = $\pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 10.5 \times 17.5$$

$$= 577.5$$

कपड़े की लंबाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}}$

$$= \frac{577.5}{1.1} \Rightarrow 525 \text{ मीटर}$$

प्रश्न 34. दो बेलनों की त्रिज्याएं 2 : 3 के अनुपात में तथा उनकी ऊंचाइयां 5 :3 के अनुपात में है। उनके आयतनों में अनुपात है :

(a) 10 : 17 (b) 20 : 27

(c) 17 : 27 (d) 20 : 37

U.P.P.C.S. (Pre) 2015

उत्तर–(b)

हल : परम्परागत विधि

माना पहले बेलन की त्रिज्या 2r तथा दूसरे बेलन की त्रिज्या 3r है तथा पहले बेलन की ऊंचाई 5h तथा दूसरे बेलन की ऊंचाई 3h है।

$$\frac{\text{पहले बेलन का आयतन}}{\text{दूसरे बेलन का आयतन}} = \frac{\pi r_1^2 h}{\pi r_2^2 h}$$

$$= \frac{\pi(2r)^2 5h}{\pi(3r)^2 3h}$$

$$= \frac{20\pi r^2 h}{27\pi r^2 h}$$

$$= \frac{20}{27}$$

अतः पहले तथा दूसरे बेलन के आयतनों का अनुपात = 20 : 27

अनुपात समझ पर

	I		II
त्रिज्या का अनुपात →	2	:	3
(त्रिज्या का अनुपात)^2 →	4	:	9
ऊंचाई का अनुपात →	5	:	3
∴ आयतन का अनुपात →	20	:	27

प्रश्न 35. एक ठोस तांबे के गोले का व्यास 6 सेमी. है। उसे कूट कर एक तार जिसका व्यास 0.2 सेमी. है, एक रूप में ढाला गया है, तार की लम्बाई है–

(a) 36 मीटर (b) 360 मीटर

(c) 24 मीटर (d) 360 सेंटीमीटर

उत्तर–(a) **42nd BPSC (Pre) 1997-98**

हल : परम्परागत विधि

गोले की त्रिज्या = $\frac{6}{2} = 3$ सेमी.

गोले का आयतन= $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3)^3$

गोले को गलाकर ढाला जाता है स्पष्टतः यह एक बेलन होगा। माना उसकी लम्बाई l है, व्यास = 0.2 सेमी.

अतः तार की त्रिज्या = $\frac{0.2}{2} = 0.1$ सेमी.

स्पष्टतः गोले का आयतन = बेलन का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi(3)^3 = \pi(0.1)^2 l$$

$$l = \frac{4}{3} \times \frac{27}{(0.1)^2}$$

$l = 3600$ सेमी.

= 36 मीटर

प्रश्न 36. किसी घन के पृष्ठ का क्षेत्रफल 384 वर्ग मीटर है। उसका आयतन होगा-

(a) 512 मी.^{3} (b) 516 मी.^{3}

(c) 1032 मी.^{3} (d) 216 मी.^{3}

U.P.P.C.S. (Pre) 2011

उत्तर–(a)

हल : परम्परागत विधि

माना घन की भुजा = x मीटर

घन के पृष्ठ का क्षेत्रफल $(6x)^2$ = 384 वर्ग मी.

$$x^2 = \frac{384}{6} = 64 \Rightarrow x = 8 \text{ मीटर}$$

घन की आयतन $(x^3) = 8^3 \Rightarrow 512$ मी.^{3}

प्रश्न 37. एक कमरा 3 मीटर भुजा वाले एक घन के आकार का है। कमरे में रखी जाने वाली सबसे लम्बी छड़ की लम्बाई है।

(a) $3\sqrt{2}$ मी. (b) $3\sqrt{3}$ मी.

(c) 3 मी. (d) $\frac{9}{2}$ मी.

(e) इनमें से कोई नहीं

Chhattisgarh P.C.S (Pre) 2014

उत्तर–(b)

हल : सामान्य समझ पर

निष्कर्ष 1. कमरे की एक भुजा = 3 मीटर

कमरे में रखी जाने वाली सबसे लम्बी छड़ कमरे के विकर्ण के बराबर होगा क्योंकि कमरे में विकर्ण की लंबाई सर्वाधिक होती है।

निष्कर्ष 2. कमरें (घन) का विकर्ण = भुजा $\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3}$ मीटर

अतः कमरे में रखे जाने वाली सबसे लम्बी छड़ की लंबाई

$= 3\sqrt{3}$ मीटर