घातांक एवं करणी
(Indices and Surds)

❑ घातांक (Indices)

किसी संख्या का उसी में जितनी बार गुणा करते हैं उतने को उस संख्या की घात (Power or Indices) कहते हैं और उस संख्या को आधार (Base) कहते हैं।

जैसे–$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ में 5 का 5 में 4 बार गुणा किया गया है। इसलिए 5 आधार है और 4 उसकी घात या घातांक।

घातांक से संबंधित प्रश्नों का हल कुछ निश्चित नियमों (सूत्रों) के द्वारा ही संभव है जिन्हें जानना अति आवश्यक है। ये महत्त्वपूर्ण नियम निम्नलिखित हैं–

➲ **नियम 1.** $a^m \times a^n = a^{m+n}$

या

$a^5 \times a^3 = a^{5+3} = a^8$

या

$\underline{a \times a \times a \times a \times a} \times \underline{a \times a \times a} = a^8$

अर्थात् यदि गुणनफल की क्रिया में आधार समान हो, तो सभी घातों का योगफल ज्ञात करके उसे आधार की घात के रूप में लिख देते हैं।

➲ **नियम 2.** $a^m \div a^n = a^{m-n}$

या

$a^5 \div a^3 = a^{5-3} = a^2$

या

$$\frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a^2$$

अर्थात् यदि भाग की क्रिया में आधार समान हो, तो भाज्य वाली घात में से भाजक वाली घात को घटा कर प्राप्त संख्या को आधार की घात लिखते हैं।

➲ **नियम 3.** $\left\{\left(a^m\right)^n\right\}^l = a^{m \times n \times l}$

या

$$\left\{\left(3^2\right)^5\right\}^4 = 3^{2 \times 5 \times 4} = 3^{40}$$

अर्थात् घात की भी घात बनती जा रही हो, तो सभी घातों का आपस में गुणा कर देते हैं और इस प्रकार प्राप्त गुणनफल को आधार की घात लिखते हैं।

➲ **नियम 4.** $(a \times b \times c \times d)^m = a^m \times b^m \times c^m \times d^m$

जैसे–$(2 \times 7 \times 11)^3 = 2^3 \times 7^3 \times 11^3$

अर्थात् कई पदों की कोई संयुक्त घात ही प्रत्येक पद की अलग घात होती है। एक दूसरा उदाहरण– $(x \times y \times z)^5$

$= x^5 \times y^5 \times z^5$

➲ **नियम 5.** $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

जैसे– $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

अर्थात् घात का चिह्न बदलने के लिए पूरे पद को (आधार सहित घात) 1 का बटा (upon) लिखते हैं।

➲ **नियम 6.** $a^0 = 1$

किसी भी संख्या की घात शून्य हो, तो उस पूरी राशि का मान एक (1) होता है।

जैसे– $7^0 = 1$

$(1525)^0 = 1$

$a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0 = 1$

या

$$\frac{a \times a \times a}{a \times a \times a} = 1$$

(अंश एवं हर में समान संख्या है अतः प्रतिफल 1 प्राप्त होगा)

➲ **नियम 7.** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

या

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2}$$

अर्थात् यदि किसी भिन्न के अंश और हर को आपस में बदल दें, तो उसकी घात का ± चिह्न उल्टा (विपरीत) हो जाता है।

➲ **नियम 8.** $\left(\frac{a \times b}{p \times q}\right)^{m} = \frac{a^m \times b^m}{p^m \times q^m}$

या

$$\left(\frac{3 \times 7}{4 \times 5}\right)^{2} = \frac{3^2 \times 7^2}{4^2 \times 5^2}$$

अर्थात् यदि कोष्ठक की घात हो, तो वह अंदर की सभी राशियों पर लिखी जाती है।

➲ **नियम 9.** $a^m = b$, तो $a = b^{1/m}$

जैसे–$a^3 = 8$, तो $a = 8^{1/3} = (2^3)^{1/3}$

$$a = 2^{3 \times \frac{1}{3}} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a = 2$$

➲ **नियम 10.** $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

जैसे– $3^{2^3} = 3^{(2^3)} = 3^8$ $(\therefore 2^3 = 8)$

जैसे $3^{2^{3^2}} = 3^{(2^{3^2})} = 3^{64}$ $[\therefore 2^{3^2} = (2^3)^2 = (8)^2 = 64]$

उदाहरणार्थ प्रश्न

प्रश्न 1. $(36)^{1/6}$ का मान बताइए।

हल : $(36)^{1/6} = (2 \times 2 \times 3 \times 3)^{1/6}$

[अभाज्य गुणनखंड किया गया]

$= (2^2 \times 3^2)^{1/6}$

[घात के रूप में लिखा गया]

$= 2^{2 \times \frac{1}{6}} \times 3^{2 \times \frac{1}{6}}$

[$(a.b)^m = a^m.b^m$ का प्रयोग किया गया]

$= 2^{1/3} \times 3^{1/3} = (2 \times 3)^{1/3}$

[$a^m . b^m = (a.b)^m$ का प्रयोग किया गया]

$= 6^{1/3} = \sqrt[3]{6} \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 2. $a^{m^n} = (a^m)^n$ हो, तो m का क्या मान होगा ?

हल : $a^{m^n} = (a^m)^n$

$a^{m^n} = a^{m.n}$ **[$(a^m)^n = a^{m.n}$ का प्रयोग किया गया]**

$m^n = m.n$

[∵ दोनों पक्षों का आधार समान है। अतः घातें समान होंगी।]

$$\frac{m^n}{m} = n$$

[m को बाएं पक्ष में पक्षांतर किया गया]

$m^{n-1} = n$

[$a^m \div a^n = a^{(m-n)}$ का प्रयोग किया गया]

$m = n^{\left(\frac{1}{n-1}\right)} \Rightarrow$ **उत्तर**

[$a^m = b$, तो $a = b^{\frac{1}{m}}$ का प्रयोग किया गया]

प्रश्न 3. $\left(\sqrt{8}\right)^{1/3}$ का मान क्या होगा ?

हल : $\left(\sqrt{8}\right)^{1/3} = \left[(8)^{1/2}\right]^{1/3}$

[कोष्ठक के अंदर करणी को घात में बदला गया]

$8^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{6}}$

[$\{(a)^m\}^n = a^{m.n}$ का प्रयोग किया अर्थात् घातों का आपस में गुणा किया गया]

$= (2^3)^{1/6}$

[8 को 2^3 घात के रूप में लिखा गया]

$= 2^{3\times\frac{1}{6}}$

[$(a^m)^n = a^{m.n}$ का प्रयोग किया अर्थात् घातों का आपस में गुणा किया गया]

$= 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ ⇒ उत्तर

[घात को करणी में बदला गया]

प्रश्न 4. $5^{\frac{1}{4}} \times (125)^{0.25}$ का सरलतम मान क्या होगा ?

हल : $5^{\frac{1}{4}} \times (125)^{0.25} = 5^{\frac{1}{4}} \times (5^3)^{\frac{25}{100}}$

[125 को घात के रूप में (5^3) तथा 0.25 को भिन्न के रूप में $\left(\frac{25}{100}\right)$ लिखा गया]

$= 5^{\frac{1}{4}} \times (5^3)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}}$

[$(5^3)^{1/4}$ के लिए $(a^m)^n = a^{m.n}$ का प्रयोग किया गया]

$= 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$

[$a^m \times a^n = a^{m+n}$ का प्रयोग किया गया]

$= 5^1 = 5$ ⇒ उत्तर

प्रश्न 5. $\left(\frac{1}{216}\right)^{-\frac{2}{3}} \div \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$ का मान = ?

हल : $\left(\frac{1}{216}\right)^{-\frac{2}{3}} \div \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$

$= \left(\frac{216}{1}\right)^{\frac{2}{3}} \div \left(\frac{27}{1}\right)^{\frac{4}{3}}$

[जब अंश और हर को आपस में बदलते हैं, तो घात का चिह्न विपरीत (– से + और + से –) हो जाता है।]

$= \left(2^3 \times 3^3\right)^{\frac{2}{3}} \div (3^3)^{\frac{4}{3}}$

[216 को $2^3 \times 3^3$ घात के रूप में तथा 27 को 3^3 घात के रूप में लिखा गया]

$= \left(2^{3\times\frac{2}{3}} \times 3^{3\times\frac{2}{3}}\right) \div \left(3^{3\times\frac{4}{3}}\right) = \left(2^2 \times 3^2\right) \div 3^4$

[$(a^m)^n = a^{m.n}$ का प्रयोग किया गया]

$= 2^2 \times 3^{(2-4)}$

[$a^m \div a^n = a^{(m-n)}$ का प्रयोग किया गया]

$= 4 \times 3^{-2} = \frac{4}{3^2}$

[3 की घात को धनात्मक कर दिया गया अर्थात् $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$]

$= \frac{4}{9}$ ⇒ उत्तर

प्रश्न 6. $\left(2^{-2}\right) + (-2)^2$ का मान = ?

हल : $\left(2^{-2}\right) + (-2)^2 = \frac{1}{2^2} + 4$

[ऋणात्मक घात को धनात्मक बनाया और (–2) का वर्ग 4 लिखा गया]

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{1} = \frac{1+16}{4} = \frac{17}{4}$$

[साधारण भिन्नों को जोड़ा गया]

$$= 4\frac{1}{4} \Rightarrow$$ उत्तर

प्रश्न 7. $\frac{(x^3)^2 \times x^4}{x^{10}} = x^p$, तो p का मान क्या होगा ?

हल : $\frac{(x^3)^2 \times x^4}{x^{10}} = x^p$ या $\frac{x^6 \times x^4}{x^{10}} = x^p$

[$(x^3)^2 = x^6$ रखा गया]

$x^{6+4-10} = x^p$

$\left[\frac{a^m.a^n}{a^R} = a^{m+n-R}\right.$ का प्रयोग किया गया$\left.\right]$

$x^0 = x^p$

$p = 0 \Rightarrow$ उत्तर

[यदि आधार समान हो, तो घातें भी समान होती हैं।]

प्रश्न 8. यदि m तथा n ऐसी पूर्णांक संख्याएं हैं कि $m^n = 121$, तो $(m-1)^{(n+1)}$ का मान क्या होगा?

हल : $m^n = 121$

$m^n = 11^2$

[121 को घात संख्या के रूप में लिखा गया]

$m = 11$ और $n = 2$

[(आधार = आधार) और (घात = घात)]

$(m-1)^{n+1} = (11-1)^{2+1} = (10)^3 = 1000 \Rightarrow$ उत्तर

प्रश्न 9. $\frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^a . \left(x-\frac{1}{y}\right)^b}{\left(y+\frac{1}{x}\right)^a . \left(y-\frac{1}{x}\right)^b}$ का सरलतम मान क्या होगा ?

हल : $\frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^a . \left(x-\frac{1}{y}\right)^b}{\left(y+\frac{1}{x}\right)^a . \left(y-\frac{1}{x}\right)^b}$

$$= \frac{\left(\frac{xy+1}{y}\right)^a}{\left(\frac{xy+1}{x}\right)^a} \times \frac{\left(\frac{xy-1}{y}\right)^b}{\left(\frac{xy-1}{x}\right)^b}$$

[प्रत्येक कोष्ठक को भिन्न के रूप में हल किया गया]

$$= \left[\frac{\left(\frac{xy+1}{y}\right)}{\left(\frac{xy+1}{x}\right)}\right]^a \times \left[\frac{\left(\frac{xy-1}{y}\right)}{\left(\frac{xy-1}{x}\right)}\right]^a$$

$\left[\frac{b^m}{c^m} = \left(\frac{b}{c}\right)^m\right.$ का प्रयोग किया गया$\left.\right]$

$$= \left[\frac{(xy+1)}{y} \times \frac{x}{(xy+1)}\right]^a \times \left[\frac{(xy-1)}{y} \times \frac{x}{(xy-1)}\right]^b$$

[भाज्य भिन्नों को ज्यों का त्यों लिखकर भाजक भिन्न को उलट गुणा कर देते हैं]

$\left(\frac{x}{y}\right)^a . \left(\frac{x}{y}\right)^b = \left(\frac{x}{y}\right)^{a+b} \Rightarrow$ उत्तर

[$a^m.a^n = a^{m+n}$ का प्रयोग किया गया]

प्रश्न 10. $[15p^2qr^3 \times 4pq^3r^2] \div [3p^2q \times 4r^4]$ का मान क्या होगा ?

हल : भाज्य $= [15\ p^2qr^3 \times 4pq^3r^2]$

$= (15 \times 4) . (p^2 \times p) . (q \times q^3) . (r^3 \times r^2)$

[संख्या को संख्या के साथ और सजातीय पदों को एक साथ लिखा गया]

$= (60).(P^{2+1})(q^{1+3})(r^{3+2})$

[$a^m.a^n = a^{m+n}$ का प्रयोग किया गया]

$= 60.p^3.q^4.r^5$

अब भाजक $= 3p^2q \times 4r^4 = 12.p^2.q.r^4$

[संख्याओं को और सजातीय पदों को एक साथ कर दिया गया]

अब दिया गया व्यंजक

$= 15p^2qr^3 \times 4pq^3r^2) \div (3p^2q \times 4r^4)$

$= (60p^3q^4r^5) \div 12p^2qr^4$

$= \left(\frac{60}{12}\right)\left(\frac{p^3}{p^2}\right)\left(\frac{q^4}{q^1}\right)\left(\frac{r^5}{r^4}\right)$

[संख्या का भाग संख्या में एवं सजातीय पदों का भाग सजातीय पद में किया गया]

$= 5(p^{3-2})(q^{4-1})(r^{5-4})$

$\left[a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}\right]$ **का प्रयोग किया गया**

$= 5pq^3r \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 11. $\frac{6a^{-2}bc^{-3}}{4ab^{-3}c^2} \div \frac{5a^{-3}b^2c^{-1}}{3ab^{-2}c^3}$ को घातांक में बदलिए।

हल :

$$\frac{6a^{-2}bc^{-3}}{4ab^{-3}c^2} \div \frac{5a^{-3}b^2c^{-1}}{3ab^{-2}c^3} = \frac{6a^{-2}bc^{-3}}{4ab^{-3}c^2} \times \frac{3ab^{-2}c^3}{5a^{-3}b^2c^{-1}}$$

[$\because$ भाजक भिन्न है। अतः इसे उलट कर गुणा कर दिया]

$$= \frac{6 \times 3}{4 \times 5} \times \frac{a^{-1} \times b^{-1} \times c^o}{a^{-2} \times b^{-1} \times c^1}$$

[अंश और हर दोनों में सूत्र $a^m.a^n=a^{(m+n)}$ का प्रयोग किया गया]

$$= \frac{9}{10} \times a^{(-1+2)} . b^{(-1+1)} . C^{(0-1)}$$

[$a^m \div a^n=a^{(m-n)}$ का प्रयोग किया गया]

$$= \frac{9}{10} \times a^1.b^0.c^{-1} = \frac{9}{10}a.1.\frac{1}{c}$$

[$b^0 = 1$ तथा $c^{-1} = \frac{1}{c^1}$ किया गया]

$$= \frac{9a}{10c} \Rightarrow \text{उत्तर}$$

प्रश्न 12. $\left(\frac{x}{y}\right)^{a-b} . \left(\frac{x}{y}\right)^{b-c} . \left(\frac{x}{y}\right)^{c-a}$ को सरल कीजिए ?

हल :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{a-b} . \left(\frac{x}{y}\right)^{b-c} . \left(\frac{x}{y}\right)^{c-a} = \left(\frac{x}{y}\right)^{(a-b+b-c+c-a)}$$

[$a^m \times a^n \times a^l = a^{(m+n+l)}$ के रूप में लिखा गया]

$$= \left(\frac{x}{y}\right)^0 = 1 \Rightarrow \text{उत्तर}$$

[$a^0 = 1$ का प्रयोग किया गया]

अभ्यास प्रश्न

1. $\frac{p^3}{qr^2} \times \frac{q^3}{p^2r} \times \frac{r^3}{pq^2}$ का सरलतम मान क्या होगा ?

2. यदि $15^x = 225^{15}$, तो x का मान ज्ञात कीजिए?

3. $12a^2b^4c^3 \div (2ab^2 \times 3bc^2)$ का मान क्या होगा ?

4. $(6^2)^3 \times 12^4 \div (4^5 \times 9^4)$ का सरलतम मान क्या होगा ?

5. $\left(\frac{p^r}{p^s}\right)^{(r+s)} \cdot \left(\frac{p^s}{p^r}\right)^{(r+s)} \cdot \left(\frac{p^r}{p^s}\right)^{(r+s)} \cdot \left(\frac{p^s}{p^r}\right)^{(r+s)}$ का सरलतम मान क्या होगा ?

6. $\left[(9a^2)^4\right]^3 \div \left[(3a)^2\right]^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}$ का सरलतम मान क्या होगा ?

8. $\left(\frac{a^y}{a^z}\right)^{\frac{1}{yz}} \cdot \left(\frac{a^z}{a^x}\right)^{\frac{1}{zx}} \cdot \left(\frac{a^x}{a^y}\right)^{\frac{1}{xy}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. $4^{(x+y)} = 1$ तथा $4^{(x-y)} = 4$, तो x, y का मान बताइए ?

10. यदि $2^{x+3} = 32$, तो 3^{x+1} का मान ज्ञात कीजिए।

11. $\frac{(243)^{\frac{n}{5}} . 3^{2n+1}}{9^n . 3^{n-1}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि $(2000)^{10} = 1.024 \times 10^k$ हो, तो k का मान क्या होगा?

13. $(256)^{0.16} . (256)^{0.09}$ का मान ज्ञात कीजिए।

14. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

15. $(64)^{-2/3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

16. $2^{3^{2^3}} \div \left[(2^3)^2\right]^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

17. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{(a^2+ab+b^2)} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{(b^2+bc+c^2)} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{(c^2+ca+a^2)}$ सरल कीजिए।

18. $\sqrt[r]{\frac{9^{\left(r+\frac{1}{4}\right)} \sqrt{3.3^{-r}}}{3.\sqrt{3^{-r}}}} = ?$

19. यदि $2^x = 3^y = 6^{-z}$ तो $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ का मान होगा?

20. यदि $a^x = b^y = c^z$ तथा $b^2 = ac$ तो y बराबर है।

21. यदि $x + y + z = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 6$ और $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 1$ जहां x, y, z में से कोई भी शून्य नहीं है, तो xyz का मान ज्ञात कीजिए।

अभ्यास प्रश्नों के हल

हल 1. $\frac{p^3}{qr^2} \times \frac{q^3}{p^2r} \times \frac{r^3}{pq^2} = \frac{p^3.q^3.r^3}{qr^2.p^2r.pq^2}$

$= \frac{p^3.q^3.r^3}{p^{(2+1)}.q^{(1+2)}.r^{(1+2)}}$

[हर में सजातीय पदों का आपस में गुणा किया गया, सूत्र $a^m \times a^n = a^{m+n}$ द्वारा]

$= \frac{p^3.q^3.r^3}{p^3.q^3.r^3} = 1 \Rightarrow$ **उत्तर**

हल 2. $15^x = 225^{15}$

$15^x = (15^2)^{15}$

[225 को $(15)^2$ के रूप मे लिखा गया]

$15^x = 15^{2 \times 15}$

[$(a^m)^n = a^{m \times n}$ के रूप में लिखा गया]

$15^x = 15^{30}$

$x = 30 \Rightarrow$ **उत्तर**

[यदि आधार समान हो, तो घातें भी समान होती हैं]

हल 3. $12a^2b^4c^3 \div (2ab^2 \times 3bc^2)$

$$= \frac{12a^2b^4c^3}{(2ab^2 \times 3bc^2)}$$

हर अर्थात् भाजक $= 2ab^2 \times 3bc^2$

$= 6ab^3c^2$

[संख्याओं को एक साथ कर दिया गया तथा सजातीय पदों में $a^m.a^n = a^{m+n}$ का सूत्र प्रयोग किया गया]

दिया गया व्यंजक $= \dfrac{12a^2b^4c^3}{(2ab^2 \times 3bc^2)}$

$$= \frac{12a^2b^4c^3}{6ab^3c^2}$$

$= 2.a^{2-1} . b^{4-3} . c^{3-2}$

[$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ का प्रयोग किया गया]

$= 2a^1b^1c^1 = 2abc \Rightarrow$ उत्तर

हल 4. $\dfrac{(6^2)^3 \times 12^4}{4^5 \times 9^4} = \dfrac{6^6 \times 12^4}{4^5 \times 9^4}$

[अंश के $(6^2)^3$ में सूत्र $(a^m)^n = a^{m.n}$ का प्रयोग किया]

$$= \frac{6^6 \times 12^4}{4^{4+1} \times (3^2)^4}$$

[हर के 4^5 को 4^{4+1} अर्थात $5 = 4 + 1$ लिखा गया तथा 9 को 3^2 के रूप में लिखा गया]

$$= \frac{6^6 \times 12^4}{4^4.4 \times 3^8}$$

[हर के 4^{4+1} को $4^4 \cdot 4^1$ अर्थात् $a^{m+n} = a^m . a^n$ के रूप में तथा $(3^2)^4$ को $(a^m)^n = a^{m.n}$ के रूप में लिखा गया]

$$= \frac{6^6 \times 12^4}{4^4.4 \times 3^4.3^4}$$

[$3^8 = 3^4 \cdot 3^4$ अर्थात् $a^{m+n} = a^m . a^n$ के रूप में लिखा गया]

$$= \frac{6^6 \times 12^4}{(4 \times 3)^4 \times 4 \times 3^4}$$

[$a^m \times b^m = (ab)^m$ का प्रयोग हर अर्थात् भाजक में किया गया]

$$= \frac{6^6 \times 12^4}{12^4 \times 4 \times 3^4} = \frac{6^6}{4 \times 3^4}$$

$$= \frac{2^6 \times 3^6}{2^2 \times 3^4} = 2^4 \times 3^2$$

$= 16 \times 9 = 144$

$\Rightarrow$ उत्तर

हल 5.

$$\left(\frac{p^r}{p^s}\right)^{(r+s)} . \left(\frac{p^s}{p^r}\right)^{(r+s)} . \left(\frac{p^r}{p^s}\right)^{(r+s)} . \left(\frac{p^s}{p^r}\right)^{(r+s)}$$

$$= \left(p^{r-s}\right)^{(r+s)} . \left(p^{s-r}\right)^{(r+s)} . \left(p^{r-s}\right)^{(r+s)} . \left(p^{s-r}\right)^{(r+s)}$$

[सभी पदों को $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ के रूप में लिखा गया]

$= p^{(r-s)(r+s)} . p^{(s-r)(s+r)} . p^{(r-s)(r+s)} . p^{(s-r)(s+r)}$

[सभी पदों को $(a^m)^n = a^{m.n}$ के रूप में लिखा गया]

$= p^{r^2-s^2} . p^{s^2-r^2} . p^{r^2-s^2} . p^{s^2-r^2}$

[सभी पदों के घातों को $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ के रूप में लिखा गया]

$= p^{r^2-s^2+s^2-r^2+r^2-s^2+s^2-r^2}$

[$a^m.a^n.a^l = a^{m+n+l}$ के रूप में लिखा गया]

$= p^0 = 1 \Rightarrow$ उत्तर

[$a^0 = 1$ अर्थात् किसी संख्या की घात शून्य हो, तो उस पूरी राशि का मान एक (1) होता है]

हल 6. $\left[(9a^2)^4\right]^3 \div \left[(3a)^2\right]^3 = \dfrac{\left[(9a^2)^4\right]^3}{\left[(3a)^2\right]^3}$

भाज्य $= \left[(9a^2)^4\right]^3 = \left[\left\{(3a)^2\right\}^4\right]^3$

[$9a^2 = (3a)^2$ लिया गया]

$= (3a)^{2\times4\times3} = (3a)^{24}$

[$\{(a^m)^n\}^p = a^{m.n.p}$ के रूप में लिखा गया]

भाजक $= \left[(3a)^2\right]^3 = (3a)^{2\times3} = (3a)^6$

[$(a^m)^n = a^{m.n}$ के रूप में लिखा गया]

व्यंजक $= \dfrac{\left[(9a^2)^4\right]^3}{\left[(3a)^2\right]^3} = \dfrac{(3a)^{24}}{(3a)^6}$

$= (3a)^{24-6} = (3a)^{18} \Rightarrow$ उत्तर

$\left[\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right.$ के रूप में लिखा गया]

हल 7. $\left(\dfrac{x^3}{y^2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\dfrac{y^3}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{x^3}{y^2} \cdot \dfrac{y^3}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}$

[$a^m.b^m = (a.b)^m$ का प्रयोग किया गया]

$= \left[x^{(3-2)}.y^{(3-2)}\right]^{2/3}$

[$a^m \div a^n = a^{m-n}$ का प्रयोग किया गया]

$= \left[x^1.y^1\right]^{2/3} = x^{\frac{2}{3}}.y^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$ उत्तर

[$(a^m)^n = a^{m.n}$ का प्रयोग किया गया]

हल 8. $\left(\dfrac{a^y}{a^z}\right)^{\frac{1}{yz}} \cdot \left(\dfrac{a^z}{a^x}\right)^{\frac{1}{zx}} \cdot \left(\dfrac{a^x}{a^y}\right)^{\frac{1}{xy}}$

$= \left[a^{(y-z)}\right]^{\frac{1}{yz}} \cdot \left[a^{(z-x)}\right]^{\frac{1}{zx}} \cdot \left[a^{(x-y)}\right]^{\frac{1}{xy}}$

[$a^m \div a^n = a^{(m-n)}$ का प्रयोग किया गया]

$= a^{\frac{y-z}{yz}} . a^{\frac{z-x}{zx}} . a^{\frac{x-y}{xy}}$

[$(a^m)^n = a^{m.n}$ का प्रयोग किया गया]

$= a^{\frac{xy-xz+yz-xy+xz-yz}{xyz}}$

[घातों का लघुत्तम लेकर जोड़ा गया]

$= a^{\frac{0}{xyz}} = a^0 = 1 \Rightarrow$ उत्तर

[शून्य (0) में किसी भी संख्या का भागफल शून्य (0) होता है अर्थात $\dfrac{0}{xyz} = 0$]

हल 9. $4^{(x+y)} = 1$ तथा $4^{(x-y)} = 4$

$\therefore\ 4^{(x+y)} = 4^0$ .....(i) $\quad\therefore\ 4^{(x-y)} = 4^1$ .....(ii)

[क्योंकि $4^0 = 1$ तथा दोनों समीकरणों में आधार समान है, तो घात भी समान होगी]

$\therefore\ x - y = 1$ .....(iii)

तथा $x + y = 0$ .....(iv)

समीकरण (iii) और (iv) को जोड़ने पर

$2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

समीकरण (iv) मे x का मान रखने पर

$\dfrac{1}{2} + y = 0$

$y = -\dfrac{1}{2}$ [पक्षांतर करने पर]

अत: x तथा y का मान क्रमश: $\dfrac{1}{2}$ एवं $-\dfrac{1}{2}$ है।

$\Rightarrow$ उत्तर

हल 10. $2^{x+3} = 32$

$2^{x+3} = 2^5$

[32 को 2^5 के रूप में लिखा गया]

$x+3=5 \Rightarrow x=5-3 \Rightarrow x=2$

[समान आधार की घातें समान होती हैं]

अब $3^{x+1}=3^{2+1}$ [x का मान 2 रखने पर]

$=3^3=27$ $\Rightarrow$ उत्तर

हल 11. $\dfrac{(243)^{\frac{n}{5}}.3^{2n+1}}{9^n.3^{n-1}}=\dfrac{(3^5)^{\frac{n}{5}}.3^{2n+1}}{(3^2)^n.3^{n-1}}$

[243 को घात के रूप में (3^5) तथा 9 को भी घात के रूप में (3^2) लिखा गया]

$$=\frac{(3^5)^{\frac{n}{5}}.3^{2n+1}}{(3^2)^n.3^{n-1}}$$

[$(a^m)^n = a^{m.n}$ के रूप में लिखा गया]

$$=\frac{3^n.3^{2n+1}}{3^{2n}.3^{n-1}}=\frac{3^{n+2n+1}}{3^{2n+n-1}}$$

[$a^m.a^n = a^{(m+n)}$ के रूप में लिखा गया]

$$=3^{(n+2n+1-2n-n+1)}$$

$\left(\dfrac{a^m}{a^n}=a^{(m-n)}\text{ के रूप में लिखा गया}\right)$

$=3^{1+1}=3^2=9$ $\Rightarrow$ उत्तर

हल 12. $(2000)^{10}=1.024\times10^k$

$2^{10}\times(1000)^{10}=1.024\times10^k$

[$(2000)^{10}$ को $(a\times b)^m = a^m\times b^m$ के रूप में लिखा गया]

$2^{10}\times(10^3)^{10}=1.024\times10^k$

[1000 को घात के रूप में लिखा गया]

$$10^k=\frac{2^{10}\times10^{30}}{1.024}$$

[1.024 का पक्षांतर किया गया एवं अंश में $(a^m)^n = a^{mn}$ का प्रयोग किया गया]

$$10^k=\frac{2^{10}\times10^{30}}{1.024}$$

$$10^k=\frac{2^{10}\times10^{30}\times10^3}{1.024\times10^3}$$

$$=\frac{2^{10}\times10^{30}\times10^3}{1024}$$

[दशमलव चिह्न हटाने के लिए 10^3 से अंश एवं हर में गुणा किया गया]

$$10^k=\frac{2^{10}\times10^{30+3}}{2^{10}}$$

[2^{10} का मान 1024 होता है तथा अंश में $a^m\times a^n = a^{m+n}$ का प्रयोग किया गया]

$10^k=10^{33}$

$K=33 \Rightarrow$ उत्तर

[समान आधार की घातें भी समान होती हैं]

हल 13. $(256)^{0.16}.(256)^{0.09}=(256)^{0.16+0.09}$

$=(256)^{25}$

[$a^m . a^n = a^{m+n}$ का प्रयोग किया गया]

$=(256)^{\frac{25}{100}}=(256)^{\frac{1}{4}}$

[.25 को भिन्न के रूप में $\dfrac{25}{100}=\dfrac{1}{4}$ लिखा गया]

$=(4^4)^{\frac{1}{4}}=4^{4\times\frac{1}{4}}=4$ $\Rightarrow$ उत्तर

[256 को घात के रूप में एवं $(a^m)^n=a^{m\times n}$ का प्रयोग किया गया]

हल 14. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}$

$$=\left(\frac{2}{1}\right)^2\times\left(\frac{3}{1}\right)^2\times\left(\frac{4}{1}\right)^2$$

[जब अंश और हर को आपस में बदलते हैं, तो घात का चिह्न विपरीत हो जाता है]

$=2^2\times3^2\times4^2$

$= (2\times3\times4)^2$

[$a^m \times b^m \times c^m = (a\times b\times c)^m$ के रूप में लिखा गया]

$= (24)^2 = 576 \Rightarrow$ उत्तर

[24 का वर्ग 576 होता है]

हल 15. $(64)^{-2/3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = (4^3)^{-\frac{2}{3}}\times\left(\frac{4}{1}\right)^2$

[64 को घात के रूप में एवं $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ को अंश एवं हर में बदलने पर घात का चिह्न विपरीत हो जाता है]

$= 4^{3\times-\frac{2}{3}}\times4^2$

$= 4^{-2}\times4^2 = 4^{-2+2} = 4^0$

$= 1 \Rightarrow$ उत्तर

[$a^m \times a^n = a^{m+n}$ के रूप लिखा गया एवं $a^0 = 1$ का प्रयोग किया गया]

हल 16. यहां भाज्य और भाजक की घातें भिन्न प्रकृति की हैं। अत: पहले भाजक और भाज्य को अलग-अलग हल करते हैं।

भाज्य $= 2^{3^{2^3}} = 2^{3^8}$

[सबसे ऊपरी घात को हल किया गया]

$= 2^{6561}$

भाजक $= [(2^3)^2]^3 = 2^{3\times2\times3}$

[$\{(a^m)^n\}^l = a^{m.n.l}$ का प्रयोग किया गया]

$= 2^{18}$

अब मूल प्रश्न $= \left[2^{3^{2^3}}\right]\div\left[\left\{(2^3)^2\right\}^3\right]$

$= 2^{6561}\div2^{18}$

$= 2^{(6561-18)} = 2^{6543} \Rightarrow$ उत्तर

[$a^m \div a^n = a^{(m-n)}$ का प्रयोग किया गया]

हल 17.

$$\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{(a^2+ab+b^2)}\times\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{(b^2+bc+c^2)}\times\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{(c^2+ca+a^2)}$$

$$= \left(x^{(a-b)}\right)^{(a^2+ab+b^2)}\times\left(x^{(b-c)}\right)^{(b^2+bc+c^2)}\times\left(x^{(c-a)}\right)^{(c^2+ca+a^2)}$$

[$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ का प्रयोग किया गया]

$= x^{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\times x^{(b-c)(b^2+bc+c^2)}\times x^{(c-a)(c^2+ca+a^2)}$

[$(a^m)^n = a^{mn}$ का प्रयोग किया गया]

$= x^{(a^3-b^3)}\times x^{(b^3-c^3)}\times x^{(c^3-a^3)}$

[$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ का प्रयोग किया गया]

$= x^{(a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3)}$

[$x^m \times x^n \times n^l = x^{m+n+l}$ का प्रयोग किया गया]

$= x^0$

$= 1 \Rightarrow$ उत्तर

हल 18. $\sqrt[r]{\dfrac{9^{\left(r+\frac{1}{4}\right)}\sqrt{3.3^{-r}}}{3.\sqrt{3^{-r}}}}$

$$= \left[\frac{3^{2\left(\frac{4r+1}{4}\right)}.3^{(1-r)^{\frac{1}{2}}}}{3.(3^{-r})^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{r}}$$

[$\sqrt[m]{n} = [n]^{\frac{1}{m}}$ का प्रयोग किया गया]

$$= \left[\frac{3^{\left(\frac{4r+1}{2}\right)}.3^{\left(\frac{1-r}{2}\right)}}{3^1.3^{-\frac{r}{2}}}\right]^{\frac{1}{r}}$$

[$(a^m)^n = a^{mn}$ का प्रयोग किया गया]

$$= \left[\frac{3^{\left(\frac{4r+1}{2}\right)}.3^{\left(\frac{1-r}{2}\right)}}{3^{\left(1-\frac{r}{2}\right)}}\right]^{\frac{1}{r}}$$

[$a^m.a^n = a^{m+n}$ का प्रयोग किया गया]

$$= \left[3^{\frac{4r+1}{2}+\frac{(1-r)}{2}-\frac{(2-r)}{2}}\right]^{\frac{1}{r}}$$

[$\frac{a^m.a^n}{a^l} = a^{(m+n-l)}$ का प्रयोग किया गया]

$$= \left[3^{\frac{(4r+1+1-r-2+r)}{2}}\right]^{\frac{1}{r}}$$

[हर समान होने पर हल किया गया]

$= \left(3^{4r}\right)^{\frac{1}{r}}$

$= \left[3^{\left(4r \times \frac{1}{r}\right)}\right]$ **[$(a^m)^n = a^{mn}$ का प्रयोग किया गया]**

$= 3^4 \Rightarrow 81 \Rightarrow$ **उत्तर**

हल 19. माना $2^x = 3^y = 6^{-z} = k$

$\therefore 2 = (k)^{\frac{1}{x}}$ .....(i)

$3 = (k)^{\frac{1}{y}}$ .....(ii)

तथा $6 = (k)^{\frac{-1}{z}}$ .....(iii)

[$a^m = n$ के रूप में है तो $a = n^{\frac{1}{m}}$ का प्रयोग किया गया]

समी. (iii) से

$6 = k^{-\frac{1}{z}}$

$2 \times 3 = k^{-\frac{1}{z}}$ [$6 = 2 \times 3$ लिखने पर]

$k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} = k^{-\frac{1}{z}}$

[2, 3 का मान समी. (i) एवं (ii) से रखने पर]

$k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = k^{-\frac{1}{z}}$

(दोनों पक्षों के आधार समान है इसलिए घातें भी बराबर होंगी)

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ [पक्षान्तर करने पर] $\Rightarrow$ **उत्तर**

हल 20. माना $a^x = b^y = c^z = k$

$a = k^{\frac{1}{x}}$, $b = k^{\frac{1}{y}}$ तथा $c = k^{\frac{1}{z}}$

[$a^m = n$ तो $a = n^{\frac{1}{m}}$ का प्रयोग किया गया]

अब प्रश्नानुसार $b^2 = ac$

$\left(k^{\frac{1}{y}}\right)^2 = k^{\frac{1}{x}} . k^{\frac{1}{z}}$

$k^{\frac{2}{y}} = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}$ [a, b, c का मान रखने पर]

[$(a^m)^n = a^{mn}$ तथा $a^m \times a^n = a^{m+n}$ का प्रयोग किया गया]

$\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ **[ल.स. लेकर भिन्न को हल किया गया]**

$\frac{2}{y} = \frac{z+x}{xz}$

$y(z+x) = 2xz$ **[तिर्यक गुणा किया गया]**

$y = \frac{2xz}{(z+x)}$ $\Rightarrow$ **उत्तर**

हल 21. दिया है,

$x + y + z = 4$ .....(i)

$x^2 + y^2 + z^2 = 6$ .....(ii)

तथा $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

[$x^{-1} = \frac{1}{x}$ का प्रयोग किया गया]

$\frac{yz + zx + xy}{xyz} = 1$ **[ल.स. लेकर हल किया गया]**

$xy + yz + zx = xyz$ .....(iii)

समी. (i) का वर्ग करने पर

$(x + y + z)^2 = (4)^2$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 16$

[$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ का प्रयोग किया गया]

समी. (ii) व (iii) से मान रखने पर-

$6 + 2(xyz) = 16 \Rightarrow$ **[पक्षान्तर करने पर]**

$2xyz = 16 - 6 = 10$

$xyz = 5$

$\Rightarrow$ **उत्तर**

❑ करणी (Surds)

करणी किसी संख्या के मूल लेने का संकेत चिन्ह है अर्थात् कोई संख्या यदि करणी में लिखी हो, तो इसका अर्थ है कि उस संख्या का मूल निकालना है। इसके अनेक रूप हैं-

देखें– $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{x}, \sqrt[5]{x}, \sqrt[6]{x}$ ..... इत्यादि

$\sqrt{x}$ अर्थात् $\sqrt[2]{x}$ का अर्थ है– x का वर्गमूल निकालना।

जैसे– $\sqrt{4}$ अर्थात् $\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{2 \times 2} = 2$

$\sqrt[3]{x}$ का अर्थ है– x का घनमूल निकालना।

जैसे– $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2} = 2$

$\sqrt[4]{x}$ का अर्थ है– x का चतुर्थ मूल निकालना।

जैसे– $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2$

$\sqrt[5]{x}$ का अर्थ है– x का पंचम मूल निकालना।

जैसे– $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2$

$\sqrt[n]{x}$ का अर्थ है– x का nवां मूल निकालना।

उपर्युक्त बातों को इस प्रकार भी लिखते हैं।

$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$ [2 घात की करणी]

$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ [3 घात की करणी]

$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ [4 घात की करणी]

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ [n घात की करणी]

करणी दो प्रकार की होती है एक सजातीय और दूसरी विजातीय करणी।

सजातीय करणी की घात और अंदर की संख्या समान होती है। जैसे– $3\sqrt{x}$ एवं $4\sqrt{x}$

विजातीय करणी की घात और अंदर की संख्या अलग-अलग होती है।

जैसे- $\sqrt{x}, \sqrt[3]{xy}, \sqrt[4]{y}, \sqrt{xy}$ .....इत्यादि।

➲ करणी का जोड़-घटाव

केवल सजातीय करणी का जोड़-घटाव ही संभव है। यह जोड़-घटाव बीजगणितीय नियमों के अनुसार ही होता है। **जैसे**– बीजगणित में सजातीय जोड़ $3x + 2x = 5x$ और घटाव $3x - 2x = x$ होता है। इसी प्रकार करणी का भी जोड़-घटाव होता है।

जैसे- $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ और $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

[कॉमन लेने के नियम पर आधारित]

विजातीय करणी का जोड़–घटाव नहीं होता है, उसे उसी रूप में रख दिया जाता है।

जैसे– $\sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{3} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{3}$

➲ करणी का गुणा-भाग

करणी का गुणा-भाग तभी संभव है जब उनकी घातें समान हों।

जैसे– $\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{5 \times 7} = \sqrt{35}$ और भाग $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$

दूसरा उदाहरण– $\sqrt[3]{15} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{15 \times 5} = \sqrt[3]{75}$

$\sqrt[3]{xy} \times \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{xyz}$

$\sqrt[3]{15} \div \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\frac{15}{5}} = \sqrt[3]{3}$

अतः समान घातीय करणी में ही गुणा-भाग की क्रिया होती है।

ध्यान दें– $\sqrt{15} \times \sqrt[3]{5}$ असमान घातीय करणी है। इनका गुणा-भाग क्रिया संभव नहीं है। इसे इसी रूप में रख दिया जाता है। अर्थात् $\sqrt{15} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt{15} \times \sqrt[3]{5}$

❑ इकाई का अंक ज्ञात करना

☞ **उदाहरणार्थ एक प्रश्न देखें-**

प्रश्न- $(1798)^{267}$ का इकाई का अंक ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई संख्या $(1798)^{267}$ के घात की संख्या में 4 से भाग देने अर्थात $\frac{267}{4} = 66$ भागफल तथा शेषफल 3 प्राप्त होगा।

अब दी गई संख्या के इकाई के अंक पर घात के रूप में

उपर्युक्त शेषफल संख्या लिखते हैं और हल कर देते हैं। इसमें जो इकाई का अंक होगा वही अभीष्ट उत्तर होगा।

अर्थात $8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$

अत: $(1798)^{267}$ को हल करने पर प्राप्त फल में इकाई का अंक 2 होगा।

☞ **उदाहरणार्थ एक और प्रश्न देखें-**

प्रश्न- $(7381)^{1793}$ का इकाई का अंक ज्ञात कीजिए।

हल : चूंकि संख्या $(7381)^{1793}$ में इकाई का अंक 1 है। अत: इस पर कोई भी घात क्यों न हो इकाई का अंक 1 ही होगा।

सदैव ध्यान दें-

किसी भी दी गई संख्या में इकाई का अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 एवं 9 ही होगा।

➲ यदि दी गई संख्या के इकाई का अंक 0, 1, 5, 6 हो तो उसकी कितनी भी घात हो इकाई का अंक हमेशा वही संख्या होगी।

कैसे?

➲ संख्या 0 का जितनी बार गुणा होगा इकाई के रूप में सदैव 0 ही प्राप्त होगा-

देखें- $0 \times 0 \times 0 \times \ldots\ldots\ldots \times n$ बार $= 0$

या $490 \times 490 \times \ldots\ldots\ldots n$ बार = इकाई अंक 0 ही होगा।

➲ संख्या 1 का जितनी बार गुणा होगा इकाई के रूप में सदैव संख्या 1 ही प्राप्त होगी-

देखे- $1 \times 1 \times 1 \times \ldots\ldots \times n$ बार $= 1^n = 1$

या $391 \times 391 \times \ldots\ldots\ldots \times n$ बार = इकाई का अंक = 1

या $21 \times 21 \times 21 = 441 \times 21$

$= 9261$ (इकाई का अंक = 1)

➲ संख्या 5 का जितनी बार भी गुणा होगा इकाई के रूप में संख्या 5 ही प्राप्त होगी-

देखें- $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 25 \times 25 = 625$ (इकाई का अंक 5)

$5 \times 5 \times \ldots\ldots \times n$ बार $= 5^n =$ इकाई का अंक 5)

➲ संख्या 6 का जितनी बार गुणा होगा इकाई के रूप में सदैव संख्या 6 ही प्राप्त होगी-

देखें-

$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

36

36

36

36

इकाई का अंक

अब शेष संख्याओं 2, 3, 4 एवं 7, 8, 9 के लिए नियम-

1. घात संख्या में 4 से भाग दें
2. शेषफल ज्ञात करें
3. आधार संख्या की इकाई के अंक पर शेषफल का घात लगाकर उत्तर ज्ञात करें।

ध्यान दें- शेषफल '0' रहने पर आधार संख्या की इकाई के अंक पर घात 4 लगाएं और गणना करके उत्तर ज्ञात करें।

जैसे- $(523)^{252}$

सर्वप्रथम घात संख्या में 4 से भाग दें

$\therefore \frac{252}{4} =$ भागफल 63 तथा शेषफल 0

अब दी गई संख्या के इकाई के अंक पर घात के रूप में शेषफल संख्या लिखकर हल किया जाता है चूंकि यहां शेषफल शून्य है इसलिए ऐसी स्थिति में मूल सं. के इकाई के घात के रूप में 4 का प्रयोग होगा।

$\therefore (3)^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

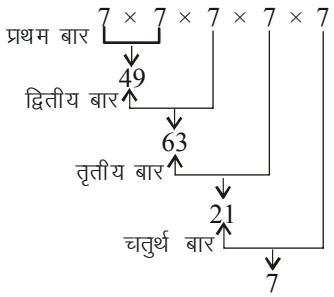
$= 81$

इसलिए इकाई का अंक 1 होगा।

ध्यान दें- 4 से ही भाग क्यों ?

घात संख्या में 4 से इसलिए भाग दिया जाता है कि किसी संख्या (0 से 9) में उसी संख्या का चार बार गुणा किया जाता है तो पुन: उसी संख्या के इकाई अंक की पुनरावृत्ति हो जाती है।

देखें- संख्या 7 में संख्या 7 का चार बार गुणा करने पर इकाई का अंक 7 ही प्राप्त होगा।



इस प्रकार इकाई का अंक 7 प्राप्त होता है।

अत: स्पष्ट है कि दी हुई संख्या के इकाई का अंक 0, 1, 5, 6 हो तो उसकी कितनी भी घात हो इकाई का अंक हमेशा वही संख्या होगी।

नोट- दी गई संख्या में इकाई का अंक विषम हो (1, 5 को छोड़कर) तथा दी गई घात चार से विभाजित हो तो इकाई का अंक 1 आएगा।

उदाहरणार्थ प्रश्न

प्रश्न 1. $\sqrt{\frac{64}{0.04}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt{\frac{64}{0.04}} = \sqrt{\frac{64 \times 100}{0.04 \times 100}}$

[हर को पूर्णांक बनाने के लिए अंश और हर दोनों में 100 से गुणा किया गया]

$= \sqrt{\frac{64 \times 100}{4}} = \sqrt{16 \times 100}$

[हर (4) का अंश (64) में भाग दिया गया]

$= \sqrt{4 \times 4 \times 10 \times 10}$

[16 का गुणनखंड 4 × 4 एवं 100 का गुणनखंड 10 × 10 लिखा गया]

$= 4 \times 10 = 40 \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 2. यदि $\sqrt{289} \div \sqrt{x} = \frac{1}{5}$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{\sqrt{289}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{5}$

$\frac{289}{x} = \frac{1}{25}$ **[दोनों पक्षों का वर्ग किया गया]**

$x \times 1 = 289 \times 25$ **[तिर्यक गुणा किया गया]**

$x = 7225 \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 3. $\sqrt{\frac{0.081 \times 0.484}{0.0064 \times 6.25}}$ का मान क्या होगा?

हल : $\sqrt{\frac{0.081 \times 0.484}{0.0064 \times 6.25}}$

$= \sqrt{\frac{.081 \times 0.484 \times 1000000}{0.0064 \times 6.25 \times 1000000}}$

[हर और अंश को पूर्णांक बनाने के लिए 1000000 से गुणा किया गया]

$= \sqrt{\frac{81 \times 484}{64 \times 625}} = \frac{9 \times 22}{8 \times 25}$

[प्रत्येक संख्या का वर्गमूल लिया गया]

$= \frac{198}{200} = .99 \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 4. $\sqrt{0.01 + \sqrt{0.0064}}$ का मान क्या होगा?

हल : $\sqrt{0.01 + \sqrt{0.0064}} = \sqrt{0.01 + \sqrt{\frac{64}{10000}}}$

[.0064 को भिन्न में बदला गया]

$= \sqrt{0.01 + \frac{8}{100}}$

[भिन्न का वर्गमूल निकाला गया]

$= \sqrt{.01 + .08}$

$= \sqrt{.09} = \sqrt{0.3 \times 0.3}$

[करणी में प्राप्त संख्या का अभाज्य गुणनखंड किया गया]

$= .3 \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 5. $\sqrt[3]{\sqrt{0.000729}}$ का मान क्या होगा ?

हल : सबसे पहले अंदर वाली करणी को हल करते हैं-

$$\sqrt{0.000729} = \sqrt{\frac{729}{1000000}}$$

[भिन्न में बदलने के लिए 1000000 से गुणा किया गया]

$$= \frac{27}{1000}$$

[गुणनखंड विधि से वर्गमूल लिया गया]

अब $\sqrt[3]{\sqrt{0.000729}} = \sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$

$$= \sqrt[3]{\frac{3\times3\times3}{10\times10\times10}} = \sqrt{\frac{3\times3\times3}{2\times5\times2\times5\times2\times5}}$$

[अभाज्य गुणनखंड किया गया]

$= \frac{3}{2\times5} = \frac{3}{10}$ या $0.3 \Rightarrow$ **उत्तर**

[घनमूल निकाला गया]

प्रश्न 6. $1-\frac{1}{(1+\sqrt{2})}+\frac{1}{(1-\sqrt{2})}$ का मान क्या होगा ?

हल : $\frac{1}{1}-\frac{1}{(1+\sqrt{2})}+\frac{1}{(1-\sqrt{2})}$

$$= \frac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$$

[हरों का लघुत्तम समापवर्त्य लिया गया]

$$= \frac{(1-2)-1+\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}{(1-2)}$$

[(a+b) (a–b) = a^2–b^2 का प्रयोग किया गया]

$$= \frac{-1-1+\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}{-1} = \frac{-1+2\sqrt{2}}{-1}$$

$$= \frac{-(1-2\sqrt{2})}{-1}$$

[ऋणात्मक चिह्न कॉमन लिया गया]

$= 1-2\sqrt{2} \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 7.

$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}}$ .....∞ का मान क्या होगा ?

हल : **नोट**–इस प्रकार के प्रश्न को हल करने के लिए पूरी श्रृंखला को x मान लिया जाता है और इस प्रकार एक समीकरण बन जाता है। फिर दोनों पक्षों का वर्ग कर देते हैं।

मान लिया $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}}$ .....∞ $= x$

अब दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+}}}.....\infty = x^2$$

ध्यान दें–एक बार वर्ग करने पर केवल एक करणी खत्म होगी।

$\therefore\ 12+x=x^2$

[क्योंकि $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+}}}.....\infty = x$ **]**

$\therefore\ x^2-x-12=0$

[पक्षांतर करने पर]

$x^2-4x+3x-12=0$

[बीजगणित के आधार पर गुणनखंड]

$x(x-4)+3(x-4)=0$

$(x-4)(x+3)=0$

यहां या तो $x-4=0$ या $x+3=0$

यदि $x-4=0$ या यदि $x+3=0$ तो $x=4$

तो $x=-3$

अत: केवल धनात्मक मान ग्रहण करने पर $x=4$

इस प्रकार के प्रश्न में यदि संख्या लगातार संख्याओं का गुणनफल हो (जैसे $12=3\times4$), तो बड़ी संख्या धनात्मक (4) तथा छोटी संख्या ऋणात्मक होती है। अत: धनात्मक अभीष्ट उत्तर बड़ी संख्या (4) होती है।

प्रश्न 8. $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+}}}}.....\infty$ का मान क्या होगा ?

हल : $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+}}}.....\infty = x$

$3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+}}}.....\infty = x^2$

[दोनों पक्षों का वर्ग करने पर]

$3+x=x^2$

[क्योंकि $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3.....\infty}}}=x$ **है]**

$x^2-x-3=0$ .....(i)

[पक्षांतर किया गया]

अब समीकरण (1) का गुणनखंड नहीं हो पाएगा अत: इसमें श्रीधराचार्य का सूत्र का प्रयोग होगा।

अब x^2 का गुणांक $a=1$, x का गुणांक $b=-1$ एवं अचर पद $c=-3$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{1+12}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}=\frac{1\pm3.61}{2}$$

[$\sqrt{13}=3.61$ लगभग मान है]

धन चिह्न लेने पर $x=\frac{1+3.61}{2}=\frac{4.61}{2}=2.305$

ऋण चिह्न लेने पर $x=\frac{1-3.61}{2}=-\frac{2.61}{2}=-1.305$

(उत्तर $=2.305, -1.305$)

प्रश्न 9. $(5241)^{298}$ का इकाई अंक बताइए।

हल : नोट—यदि दी हुई संख्या के इकाई का अंक 0, 1, 5, 6 हो, तो उसकी कितनी भी घात हो इकाई का अंक हमेशा वही संख्या होगी।

चूंकि संख्या $(5241)^{298}$ में इकाई अंक 1 है। अत: इसकी कोई भी घात क्यों न हो इकाई अंक 1 ही होगा।

प्रश्न 10. $(786)^{513}$ का इकाई अंक बताइए।

हल : चूंकि संख्या $(786)^{513}$ में इकाई अंक 6 है। अत: इसकी कोई भी घात क्यों न हो इकाई अंक 6 ही होगा।

प्रश्न 11. $(243)^{2348}$ का इकाई अंक क्या होगा।

हल : नोट—दी गई संख्या में इकाई का अंक विषम हो (1, 5 को छोड़कर) तथा दी गई घात चार से विभाजित हो तो इकाई का अंक 1 आएगा।

चूंकि संख्या (243) में इकाई अंक 3 विषम है तथा घात 2348 चार से विभाजित है इसलिए इकाई का अंक 1 होगा।

प्रश्न 12. $(1397)^{512}$ का इकाई अंक क्या होगा?

हल : चूंकि संख्या 1397 में इकाई अंक 7 विषम है तथा घात 512 चार (4) से विभाजित है इसलिए इकाई का अंक 1 होगा।

प्रश्न 13. $(243)^{246}$ का इकाई अंक क्या होगा?

हल : **नोट**—घात को चार से भाग देने पर जो शेष बचता है, दी गई संख्या की इकाई के अंक का उतनी बार गुणा कर देते हैं, तो उस संख्या का इकाई अंक प्राप्त हो जाता है।

घात 246 को चार से भाग देने पर शेषफल 2 बचेगा इसलिए 243 के इकाई के अंक 3 को 2 बार गुणा करना पड़ेगा अर्थात् $3 \times 3 = 9$ अत: $(243)^{246}$ में इकाई का अंक 9 होगा।

प्रश्न 14. $243 \times 247 \times 545 \times 743$ में इकाई अंक क्या होगा ?

हल : **नोट**—यदि अलग-अलग संख्याओं का आपस में गुणा हो, तो उनकी इकाई के अंकों के गुणन का इकाई अंक अभीष्ट उत्तर होगा।

243 के इकाई का अंक = 3

247 के इकाई का अंक = 7

545 के इकाई का अंक = 5

743 के इकाई का अंक = 3

उपर्युक्त इकाईयों का गुणनफल $= 3 \times 7 \times 5 \times 3 = 315$

अत: इकाई का अंक = 5 होगा।

प्रश्न 15. $796 \times 845 \times 743$ में इकाई अंक क्या होगा ?

हल : 796 के इकाई का अंक = 6

845 के इकाई का अंक = 5

743 के इकाई का अंक = 3

उपर्युक्त का गुणनफल $= 6 \times 5 \times 3 = 90$

अत: इकाई का अंक शून्य (0) होगा।

अभ्यास प्रश्न

1. $\frac{1505}{\sqrt{x}} = 150.5$, तो x का मान क्या होगा ?
2. $\sqrt[3]{129 - \sqrt[3]{64}}$ का मान ज्ञात कीजिए।
3. यदि $\sqrt{1 + \frac{56}{169}} = 1 + \frac{x}{13}$, तो x का मान बताइए।
4. $\sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + ...\infty}}}$ का मान बताइए।
5. $[(251)^{98} + (21)^{29} - (106)^{100} + (705)^{35} - (16)^{4} + 259]$ के सरलीकृत रूप में इकाई का अंक बताइए।
6. $(260)^{102} + (260)^{103}$ में इकाई का अंक है।
7. $\sqrt{\frac{4\frac{1}{7} - 2\frac{1}{4}}{3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{7}} \div \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 - \frac{1}{5}}}}}$ का मान क्या होगा?
8. $735 \times 897 \times 991 \times 236$ में इकाई अंक ज्ञात कीजिए ?
9. $\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{343}}$ का मान बताइए।
10. यदि $\sqrt{1 + \frac{25}{144}} = 1 + \frac{x}{12}$, तो x का मान क्या होगा?

11. $(729)^{59}$ में इकाई का अंक ज्ञात कीजिए।

12. $(7^{95}-3^{58})$ का इकाई अंक ज्ञात कीजिए।

13. $(2467)^{153} \times (341)^{72}$ के गुणनफल में इकाई अंक क्या होगा?

14. जब 2^{31} को 5 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्या होगा?

अभ्यास प्रश्नों के हल

हल 1. $\frac{1505}{\sqrt{x}} = \frac{150.5}{1}$

$150.5 \times \sqrt{x} = 1505 \times 1$

[तिर्यक गुणा किया गया]

$\sqrt{x} = \frac{1505}{150.5}$ या $\sqrt{x} = \frac{1505 \times 10}{150.5 \times 10}$

[हर को पूर्णांक बनाने के लिए अंश और हर दोनों में 10 से गुणा किया गया]

$\sqrt{x} = \frac{1505 \times 10}{1505} \Rightarrow \sqrt{x} = 10$

[दोनों पक्षों का वर्ग करने पर]

$x = 100 \Rightarrow$ **उत्तर**

हल 2. $\sqrt[3]{129 - \sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{129 - 4}$

[दूसरी करणी अर्थात 64 का घनमूल 4 होता है।]

$= \sqrt[3]{125} = 5 \Rightarrow$ **उत्तर**

[125 का घनमूल अर्थात् $\sqrt[3]{125} = 5$ होता है]

हल 3. $\sqrt{1 + \frac{56}{169}} = 1 + \frac{x}{13}$

$\sqrt{\frac{169+56}{169}} = \frac{13+x}{13}$

[दोनों तरफ लघुत्तम समापवर्त्य लिया गया]

$\sqrt{\frac{225}{169}} = \frac{13+x}{13}$

$\frac{15}{13} = \frac{13+x}{13}$ **[वर्गमूल निकाला गया]**

$15 = 13 + x$

[हर समान है इसलिए अंश बराबर होंगे]

$x = 15 - 13 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ **उत्तर**

[पक्षांतर किया गया]

हल 4. मान लीजिए

$x = \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + ...}}} \infty$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$x^2 = 42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + ...}}} \infty$

$x^2 = 42 + x$

[क्योंकि $x = \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + ...}}} \infty$ **है]**

$x^2 - x - 42 = 0$

[पक्षांतर करने पर]

$x^2 - 7x + 6x - 42 = 0$

[बीजगणित के आधार पर गुणनखंड किया गया $(-7x+6x = -x)$]

$x(x-7) + 6(x-7) = 0$

$(x-7)(x+6) = 0$

यदि $(x-7) = 0$ या यदि $(x+6) = 0$

तो $x = 7$ $\quad$ $x = -6$

नोट-इस प्रकार के प्रश्न में यदि संख्या दो लगातार संख्याओं का गुणनफल हो (42 = 6 × 7), तो बड़ी संख्या धनात्मक अभीष्ट उत्तर होगी।

हल 5. $(251)^{28}$ में इकाई का अंक = 1

$(21)^{29}$ में इकाई का अंक = 1

$(106)^{100}$ में इकाई का अंक = 6

$(705)^{35}$ में इकाई का अंक = 5

$(16)^{4}$ में इकाई का अंक = 6

तथा 259 में इकाई का अंक = 9

अतः $(251)^{98} + (21)^{29} - (106)^{100} + (705)^{35} - (16)^4 + 259$ में इकाई का अंक

$= 1 + 1 - 6 + 5 - 6 + 9 = 4 \Rightarrow$ **उत्तर**

हल 6. चूंकि दी गई संख्या में इकाई का अंक शून्य है। अतः इसकी कोई घात क्यों न हो इकाई का अंक शून्य (0) ही होगा।

हल 7. $\sqrt{\dfrac{4\frac{1}{7}-2\frac{1}{4}}{3\frac{1}{2}+1\frac{1}{7}} \div \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{5-\frac{1}{5}}}}}$

$$= \sqrt{\frac{\frac{29}{7}-\frac{9}{4}}{\frac{7}{2}+\frac{8}{7}} \div \frac{1}{2+\dfrac{1}{2+\frac{5}{24}}}} \quad ....(1)$$

[सभी भिन्नों को पूर्ण भिन्न में बदला गया]

भिन्न $\frac{29}{7}-\frac{9}{4}$ को लेकर हल करते हैं—

$$\frac{29}{7}-\frac{9}{4} = \frac{116-63}{28} = \frac{53}{28}$$

भिन्न $\frac{7}{2}+\frac{8}{7}$ को लेकर हल करते हैं—

$$\frac{7}{2}+\frac{8}{7} = \frac{49+16}{14} = \frac{65}{14}$$

तथा भिन्न $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\frac{5}{24}}}$ को हल करते हैं—

$$\frac{1}{2+\dfrac{1}{2+\frac{5}{24}}} = \frac{1}{2+\dfrac{1}{\frac{53}{24}}} = \frac{1}{2+\frac{24}{53}}$$

$$= \frac{1}{\frac{106+24}{53}} = \frac{53}{130}$$

$\therefore$ दिए गए व्यंजक $= \sqrt{\dfrac{\frac{53}{28}}{\frac{65}{14}} \div \frac{53}{130}}$

[सभी भिन्नों को सरलतम मान समीकरण (1) में रखा गया]

$$= \sqrt{\frac{53}{28} \times \frac{14}{65} \times \frac{130}{53}}$$

$\left[\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \frac{1}{a} \times \frac{b}{1} = \frac{b}{a}\right]$ **का प्रयोग किया गया**

$$= \sqrt{\frac{53}{130} \times \frac{130}{53}} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow \text{उत्तर}$$

हल 8. 735 में इकाई अंक = 5

897 में इकाई अंक = 7

991 में इकाई अंक = 1

236 में इकाई अंक = 6

उपर्युक्त इकाइयों का गुणनफल $= 5 \times 7 \times 1 \times 6 = 210$

अतः इकाई का अंक शून्य (0) होगा।

हल 9 इस तरह के प्रश्न हल करने के लिए सबसे पहले अंदर की करणी को हल किया जाता है।

अंदर की करणी $\sqrt[3]{343}$ है।

$\therefore \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7 \times 7 \times 7}$

[अभाज्य गुणनखंड किया गया]

$= 7$

[तीन गुणनखंड में से एक लिया गया क्योंकि घनमूल निकालना है]

अब दिया गया पद = $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{343}} = \sqrt[3]{1+7}$

[$\sqrt[3]{343}$ का मान 7 है]

$= \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2\times 2\times 2}$

[अभाज्य गुणनखंड किया गया]

$= 2 \Rightarrow$ **उत्तर**

[तीन गुणनखंडों में से एक लिया गया क्योंकि घनमूल निकालना है]

हल 10. सर्वप्रथम $\sqrt{1+\frac{25}{144}} = \sqrt{\frac{144+25}{144}}$

$$= \sqrt{\frac{169}{144}} = \frac{13}{12}$$

[सर्वप्रथम बाएं पक्ष को हल करके वर्गमूल निकाला गया]

अब $\sqrt{1+\frac{25}{144}} = 1+\frac{x}{12}$

$$\frac{13}{12} = 1+\frac{x}{12}$$

पक्षांतर करने पर

$$\frac{x}{12} = \frac{13}{12} - 1 = \frac{13-12}{12}$$

$$\frac{x}{12} = \frac{1}{12}$$

[हर समान है इसलिए अंश भी समान होंगे]

अत: $x = 1$ $\Rightarrow$ **उत्तर**

हल 11. घात 59 को चार से भाग देने पर शेषफल 3 बचेगा इसलिए प्रश्न की मूल संख्या 729 के इकाई के अंक 9, पर घात 3 लगाकर, हल कर दिया जाय-

अर्थात $9^3 = \underbrace{9 \times 9}_{81} \times 9$

$\downarrow$

9 (इकाई का अंक)

इस लिए प्रश्न में दी गई संख्या के इकाई का अंक 9 होगा।

$\Rightarrow$ **उत्तर**

हल 12. सर्वप्रथम संख्या 7^{95} में इकाई का अंक ज्ञात करेंगे-

घात 95 को चार से भाग देने पर शेषफल 3 बचेगा इसलिए संख्या 7 की घात 3 होगा

अर्थात $7^3 = \underbrace{7 \times 7}_{49} \times 7$

$\downarrow$

63

इस प्रकार 7^{95} में इकाई का अंक 3 प्राप्त हुआ।

अब संख्या 3^{58} में इकाई का अंक ज्ञात करेंगे।

घात 58 को चार से भाग देने पर शेषफल 2 बचेगा इसलिए संख्या 3 के घात 2 होगा-

अर्थात $3^2 = 3\times 3 = 9$

$\therefore$ $(7^{95} - 3^{58})$ में इकाई का

अंक $= 3 - 9$

(चूंकि संख्या 3, 9 से छोटा है इसलिए 13 में से 9 घटाया जाएगा)

$= 13 - 9 \Rightarrow 4$

इस प्रकार इकाई का अंक = 4 $\Rightarrow$ **उत्तर**

हल 13. सर्वप्रथम संख्या $(2467)^{153}$ का इकाई का अंक ज्ञात करेंगे।

घात 153 को चार से भाग देने पर शेषफल 1 बचेगा इसलिए 2467 के इकाई के अंक 7 की घात 1 होगा-

अर्थात $7^1 = 7$ (इकाई का अंक)

अब संख्या $(341)^{72}$ का इकाई का अंक ज्ञात करेंगे।

चूंकि संख्या $(341)^{72}$ में इकाई अंक 1 है। अत: इसकी कोई भी घात क्यों न हो इकाई अंक 1 ही होगा।

$\therefore$ $(2467)^{153} \times (341)^{72}$ के गुणनफल में इकाई का अंक = $7\times 1 = 7$

हल 14. घात 31 को चार से भाग देने पर शेषफल 3 बचेगा इसलिए संख्या 2 का घात होगा।

अर्थात $2^3 = 2 \times 2 \times 2 \Rightarrow 8$

(जो इकाई का अंक है)

अब इकाई के अंक 8 को 5 से भाग देने पर शेषफल 3 प्राप्त होगा जो अभीष्ट है। ⇒ **उत्तर**

❑ घातांक और करणी के मिश्रित स्वरूप

कुछ प्रश्न इस प्रकार के होते हैं कि उनमें करणी और घातांक दोनों का प्रयोग रहता है। इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए करणी के कुछ महत्त्वपूर्ण नियम बड़े उपयोगी सिद्ध हो सकते हैं। जो निम्नलिखित हैं–

➲ **नियम 1.** $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

या

$$\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$$

अर्थात् किसी संख्या की करणी n घात में हो, तो उस संख्या की घात $\frac{1}{n}$ हो जाती है।

➲ **नियम 2.** $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}}$

या

$$\sqrt[4]{5 \times 7} = \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = 5^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}}$$

अर्थात् दो या दो से अधिक संख्याओं पर एक साथ n घात की करणी हो, तो उन संख्याओं पर अलग-अलग घात $\frac{1}{n}$ हो जाएगी।

➲ **नियम 3.** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$

अर्थात् यदि किसी भिन्न पर n घात की करणी हो, तो अंश पर भी n घात की करणी तथा हर पर भी n घात की करणी हो जाएगी।

जैसे– $\sqrt[5]{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[5]{8}} = \frac{7^{\frac{1}{5}}}{8^{\frac{1}{5}}}$

➲ **नियम 4.** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$

या

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^5 = 7^{\frac{5}{3}}$$

अर्थात् किसी संख्या की करणी n घात वाली हो और उस पूरे का घातांक m हो, तो संख्या की घातांक $\frac{m}{n}$ हो जाती है।

➲ **नियम 5.** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[l]{a}}} = a^{\frac{1}{m.n.l.}}$

या

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}} = 7^{\frac{1}{5\times3\times4}} = 7^{\frac{1}{60}}$$

अर्थात् यदि करणी की भी करणी हो, तो करणी के घातों का आपस में गुणा करके एक बटा (one upon) लिख देते हैं।

उदाहरणार्थ प्रश्न

प्रश्न 1. यदि $5\sqrt{5} \times 5^3 \div 5^{-\frac{3}{2}} = 5^{(a+2)}$, तो a का मान क्या होगा ?

हल : $5\sqrt{5} \times 5^3 \div 5^{-\frac{3}{2}} = 5^{(a+2)}$

$$\frac{5 \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^3}{5^{-\frac{3}{2}}} = 5^{(a+2)}$$

[$\sqrt{5}$ को घात के रूप में $5^{\frac{1}{2}}$ लिखा गया]

$$\frac{5^{1+\frac{1}{2}+3}}{5^{-\frac{3}{2}}} = 5^{(a+2)}$$

[गुणा वाली घातों को जोड़ा गया अर्थात् $a^m \times a^n = a^{m+n}$ का प्रयोग किया गया]

$$5^{\left(\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\right)} = 5^{(a+2)}$$

$\left[\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right]$ का प्रयोग किया गया

$$5^{\left(\frac{12}{2}\right)} = 5^{(a+2)} \Rightarrow 5^6 = 5^{(a+2)}$$

$$6 = a + 2$$

[समान आधार की घात भी समान होती है]

$a = 6-2 \Rightarrow a=4 \Rightarrow$ उत्तर

[पक्षांतर किया गया]

प्रश्न 2. $\sqrt[3]{[(32)^{3/5} \times (243)^{-3/5}]}$ को हल कीजिए।

हल : $\sqrt[3]{[(32)^{3/5} \times (243)^{-3/5}]}$

$$= \sqrt[3]{[(2^5)^{3/5} \times (3^5)^{-3/5}]}$$

[$32=2^5$ तथा $243 = 3^5$ अर्थात् 32 और 243 को घात के रूप में लिखा गया]

$$= \sqrt[3]{2^{5\times\frac{3}{5}} \times 3^{5\times\left(-\frac{3}{5}\right)}}$$

[घात का घात में गुणा किया गया]

$$= \sqrt[3]{2^3 \times 3^{-3}} = 2^{3\times\frac{1}{3}} \times 3^{-3\times\frac{1}{3}}$$

[करणी को घात में बदला गया।]

$$= 2 \times 3^{-1}$$

$$= \frac{2}{3} \Rightarrow \text{उत्तर} \qquad \left(\because a^{-1} = \frac{1}{a}\right)$$

प्रश्न 3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}\right]$ का प्रयोग किया गया

$$= (2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2} \qquad \Rightarrow \text{उत्तर}$$

[$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ का प्रयोग किया गया]

प्रश्न 4. $\sqrt{0.014 \times 0.14x} = 0.014 \times 0.14\sqrt{y}$, तो $\frac{x}{y}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt{0.014 \times 0.14x} = 0.014 \times 0.14\sqrt{y}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$0.014 \times 0.14x = (0.014 \times 0.14)^2 \left(\sqrt{y}\right)^2$$

$$0.014 \times 0.14x = (0.014 \times 0.14)^2\, y$$

$\left[\left(\sqrt{y}\right)^2 = y^{\frac{1}{2}\times 2} = y$ में $\left(\sqrt{a}\right)^n = a^{\frac{1}{2}\times n}$ का प्रयोग किया गया]

$$\frac{x}{y} = \frac{(0.014 \times 0.14)^2}{0.014 \times 0.14}$$

(पक्षांतर किया गया)

$$\frac{x}{y} = \frac{(0.014 \times 0.14)^2}{0.014 \times 0.14}$$

$$\frac{x}{y} = 0.00196 \Rightarrow \text{उत्तर}$$

प्रश्न 5. $\sqrt[3]{2^4\sqrt{2^{-5}\sqrt{2^6}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : सबसे पहले अंदर की करणी हल करते हैं-

$$\sqrt[3]{2^4\sqrt{2^{-5}\sqrt{2^6}}}$$

$$\sqrt{2^6} = \sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}}$$

[अभाज्य गुणनखंड के बाद दो-दो का जोड़ा बनाया गया]

$$= 2\times2\times2 = 2^3$$

अब $\sqrt{2^{-5}\sqrt{2^6}} = \sqrt{\frac{1}{2^5}\times2^3}$

[$\sqrt{2^6}$ का मान रखा गया और $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ का प्रयोग किया गया]

$$= \sqrt{\frac{1\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2}} = \sqrt{\frac{1}{2\times2}}$$

[अभाज्य गुणनखंड किया गया]

$$= \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{2^4\sqrt{2^{-5}\sqrt{2^6}}} = \sqrt[3]{2^4\times\frac{1}{2}}$$

[$\sqrt{2^{-5}\sqrt{2^6}}$ का मान रखा गया]

$$\sqrt[3]{2\times2\times2\times2\times\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{2\times2\times2} = 2$$

$\Rightarrow$ उत्तर

[$a\sqrt[3]{a\times a\times a} = a^{3\times\frac{1}{3}} = a$ का प्रयोग किया गया]

प्रश्न 6. यदि $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$, तो x का मान ज्ञात कीजिए जो 1 से बड़ा है।

हल : $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$

बायां पक्ष $x^{x\sqrt{x}} = x.x^{\frac{1}{2}}$

$$= x^{x\left(1+\frac{1}{2}\right)} = x^{x\frac{3}{2}}$$

[x की घात में $a^m.a^n = a^{m+n}$ का प्रयोग किया गया]

दांया पक्ष $(x\sqrt{x})^x = (x.x^{\frac{1}{2}})^x$

($\sqrt{x}$ को घात के रूप में लिखा गया)

$$= \left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)^x = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^x$$

$$= x^{\frac{3}{2}x}$$

[$a^m.a^n = a^{m+n}$ का प्रयोग किया गया तथा $(a^m)^n = a^{m.n}$ का भी प्रयोग किया गया]

बायां पक्ष = दायां पक्ष

$$x^{x\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}x}$$

$$x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}x$$

[आधार समान है, तो घात भी समान होगी।]

$$\frac{x^{3/2}}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\left[\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ का प्रयोग किया गया}\right]$$

दोनों तरफ का वर्ग करने पर

$$x = \frac{9}{4} \Rightarrow \text{उत्तर}$$

प्रश्न 7. $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5+3-2\sqrt{15}}$

[8 को 5+3 के रूप में लिखा गया]

$$= \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{5}.\sqrt{3}}$$

[$\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ का प्रयोग किया गया]

$$= \sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}$$

[$a^2 + b^2 - 2ab$ का प्रयोग किया गया]

$$= \sqrt{5} - \sqrt{3} \Rightarrow \text{उत्तर}$$

$$\left[\sqrt{a^2} = a^{2\times\frac{1}{2}} = a \text{ का प्रयोग किया गया}\right]$$

प्रश्न 8. यदि P = 999 हो, तो

$\sqrt[3]{p(p^2+3p+3)+1}$ का मान क्या होगा ?

हल :

$$\sqrt[3]{p(p^2+3p+3)+1} = \sqrt[3]{p^3+3p^2+3p+1}$$

[p का गुणा किया गया]

$$= \sqrt[3]{p^3+3p(p+1)+1}$$

[$3p^2 + 3p$ में 3p कामन लिया गया]

$$= \sqrt[3]{(p+1)^3}$$

[$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$ सूत्र का प्रयोग किया गया]

$$= (p+1)^{3\times\frac{1}{3}} = p+1$$

$$\left[\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \text{ का प्रयोग किया गया}\right]$$

$$= 999 + 1 \Rightarrow 1000 \quad \Rightarrow \text{उत्तर}$$

[P का मान 999 रखा गया]

अभ्यास प्रश्न

1. $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ तथा $\sqrt[4]{4}$ में सबसे बड़ी संख्या कौन है ?
2. $\left(-\frac{1}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$ का मान ज्ञात कीजिए।
3. यदि $\sqrt{(3)^5} \times 9^2 = 3^a \times 3\sqrt{3}$ हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए।
4. $(2.1)^2 \times \sqrt{0.0441}$ का मान क्या होगा ?
5. $(4^{10} \times 7^3 \times 16^2 \times 11 \times 10^2)$ में अभाज्य गुणनखंडों की कुल संख्या कितनी है ?

अभ्यास प्रश्नों का हल

हल 1. इस प्रकार के प्रश्न को हल करने के लिए प्रत्येक संख्या को समान घात वाली करणी में बदला जाता है।

$$\sqrt{2} = 2^{1/2}$$

$$\sqrt[3]{3} = 3^{1/3}$$

$$\sqrt[4]{4} = 4^{1/4}$$

इसके बाद घातों में उस संख्या से गुणा करेंगे कि प्रत्येक करणी समान घात में बदल जाए–

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{6}{6}} = 2^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}\times\frac{4}{4}} = 3^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$$

$$\sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}} = 4^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{64}$$

स्पष्ट है $\sqrt[12]{81}$ अर्थात् $\sqrt[3]{3}$ सबसे बड़ी संख्या है।

हल 2. $\left(-\frac{1}{343}\right)^{-\frac{2}{3}} = (-343)^{\frac{2}{3}}$

$\left[\left(\frac{1}{a}\right)^n = a^{-n}\right]$ **का प्रयोग किया गया**

$$= \left[(-7)^3\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= (-7)^{3\times\frac{2}{3}}$$

[(–343) = (–7) × (–7) × (–7) अर्थात $(-7)^3$ लिखकर $(a^m)^n = a^{m\times n}$ का प्रयोग किया गया]

$= (-7)^2$

$= (-7) \times (-7) = 49 \Rightarrow$ **उत्तर**

हल 3. $\sqrt{(3)^5} \times 9^2 = 3^a \times 3\sqrt{3}$

$$3^{\frac{5}{2}} \times (3^2)^2 = 3^a \times 3 \times 3^{\frac{1}{2}}$$

[$\sqrt{3}$ को घात के रूप में लिखा गया]

$$3^{\frac{5}{2}} \times 3^4 = 3^{a+1+\frac{1}{2}}$$

[$a^m \times a^n = a^{m+n}$ का प्रयोग किया गया]

$$3^{\frac{5+8}{2}} = 3^{\frac{2a+2+1}{2}}$$

$$\frac{5+8}{2} = \frac{2a+2+1}{2}$$

[दोनों पक्षों के आधार समान हैं इसलिए घातें भी समान होंगी]

$$\frac{13}{2} = \frac{2a+3}{2}$$

[हर दोनों पक्षों में हर समान है अतः अंश भी समान होगा]

$13 = 2a + 3$

$2a = 13 - 3 \Rightarrow 2a = 10$

$a = 5 \Rightarrow$ **उत्तर**

हल 4.

$$(2.1)^2 \times \sqrt{0.0441} = \left(\frac{21}{10}\right)^2 \times \sqrt{\frac{441}{10000}}$$

[दशमलव चिह्न हटाने के लिए 10 एवं करणी के अंदर 10000 से गुणा-भाग किया गया]

$$= \frac{21\times21}{10\times10} \times \sqrt{\frac{21\times21}{100\times100}}$$

$$= \frac{21}{10} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{100}$$

[करणी के अंदर की संख्या का वर्गमूल निकाला गया]

$$= \frac{9261}{10000} = 0.9261 \Rightarrow$$ **उत्तर**

[सभी भिन्नों का आपस में गुणा करके हल किया गया]

हल 5. $(4^{10} \times 7^3 \times 16^2 \times 11 \times 10^2)$

$= [(2\times2)^{10} \times (7)^3 \times (2\times2\times2\times2)^2 \times 11^1 \times (2\times5)^2]$

[सभी संख्याओं का अभाज्य गुणनखंड किया जाए]

$= 2^{10} \times 2^{10} \times 7^3 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 11^1 \times 2^2 \times 5^2$

अभाज्य गुणनखंडों की संख्या = अभाज्य संख्याओं में घातों की संख्याओं का योग

$= 10 + 10 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 = 36$

अतः अभाज्य गुणनखंडों की कुल संख्या 36 होगी।

$\Rightarrow$ **उत्तर**

परीक्षा प्रश्न

प्रश्न 1. मान लें कि $x = \frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$ और $y = \frac{1}{x}$, तो $3x^2 - 5xy + 3y^2$ का मान है-

(a) 1771 (b) 1171

(c) 1177 (d) 1717

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2015

S.S.C. स्नातक स्तरीय परीक्षा, 2000, 2005

उत्तर—(d)

हल : परंपरागत विधि

$$x = \frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$$

अंश और हर में $\sqrt{13}+\sqrt{11}$ से गुणा करने पर

$$x = \frac{(\sqrt{13}+\sqrt{11})(\sqrt{13}+\sqrt{11})}{(\sqrt{13}-\sqrt{11})(\sqrt{13}+\sqrt{11})}$$

$$= \frac{(\sqrt{13}+\sqrt{11})^2}{(\sqrt{13})^2-(\sqrt{11})^2} \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2-b^2]$$

$$= \frac{13+11+2\sqrt{13}\times\sqrt{11}}{13-11} \quad [\because (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab]$$

$$= \frac{24+2\sqrt{143}}{2} \Rightarrow 12+\sqrt{143}$$

$$\because \quad y = \frac{1}{x} = \frac{1}{12+\sqrt{143}} = \frac{12-\sqrt{143}}{(12+\sqrt{143})(12-\sqrt{143})}$$

$$= \frac{12-\sqrt{143}}{(144-143)} \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2-b^2]$$

$$= \frac{12-\sqrt{143}}{1} = 12-\sqrt{143}$$

प्रश्न से

$$3x^2 - 5xy + 3y^2 = 3x^2 - 6xy + 3y^2 + xy$$
$$= 3(x^2+y^2-2xy)+xy$$
$$= 3(x-y)^2 + xy$$
$$= 3[(12+\sqrt{143}) - (12-\sqrt{143})]^2$$
$$+ (12+\sqrt{143})(12-\sqrt{143})$$
$$= 3[2\sqrt{143}]^2 + (144-143)$$
$$= 3\times4\times143 + 1 = 1716+1 = 1717$$

ध्यान रखें-

$$\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}} = \left(\frac{13+11}{2}\right)\sqrt{13\times11}$$
$$= 12\sqrt{143}$$

इसी प्रकार

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \left(\frac{7+5}{2}\right)\sqrt{7\times5}$$
$$= 6\sqrt{35}$$

केवल इसी प्रकृति के सरलीकरण में लागू।

प्रश्न 2. यदि $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}, y = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, तो $8xy(x^2+y^2)$ का मान क्या होगा?

(a) 194 (b) 112

(c) 196 (d) 290

S.S.C. C.P.O. परीक्षा, 2015

उत्तर—(b)

हल : परंपरागत विधि

दिया है $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ तथा $y = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

परिमेय करण करने पर अर्थात x में $2-\sqrt{3}$ से अंश तथा हर में गुणा तथा y में $2+\sqrt{3}$ से अंश और हर में गुणा करने पर

$$x = \frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \text{ तथा } y = \frac{(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$x = \frac{2-\sqrt{3}}{(4-3)} \text{ तथा } y = \frac{2+\sqrt{3}}{(4-3)} \quad [\because (a-b)(a+b) = a^2-b^2]$$

$$x = 2-\sqrt{3} \text{ तथा } y = 2+\sqrt{3}$$

प्रश्न से

$8xy\,(x^2+y^2)=8(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})[(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2]$

$= 8(4-3)[4+3-2\times2\sqrt{3}+4+3+2\times2\sqrt{3}]$

$$\left[\begin{array}{l}\because (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab \\ (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab\end{array}\right]$$

$= 8\,[7-4\sqrt{3}+7+4\sqrt{3}]$

$= 8\times 14 \Rightarrow 112$

प्रश्न 3. $\sqrt{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}$ का घातांक रूप क्या है ?

(a) $6^{-1/2}$ (b) $6^{1/2}$

(c) 6 (d) $6^{1/4}$

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2015

उत्तर—(d)

हल : परंपरागत विधि

$$\sqrt{\sqrt{2}\times\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{6^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 6^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} \Rightarrow 6^{\frac{1}{4}}$$

प्रश्न 4. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ का सरलीकृत मान है-

(a) $\sqrt{2}$ (b) 1

(c) 0 (d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

S.S.C. C.P.O. परीक्षा, 2015

S.S.C. स्नातक स्तरीय परीक्षा, 2004, 2005

उत्तर—(d)

हल : परंपरागत विधि

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{3})}+\frac{1}{(\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} \quad [\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2]$$

$$=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(2+5-2\sqrt{10}-3)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(4-2\sqrt{10})}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(2-\sqrt{10})}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{5}\times\sqrt{2})}$$

($2 = \sqrt{2}\times\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{10}=\sqrt{5}\times\sqrt{2}$ रखा गया)

$$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{5})}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

प्रश्न 5. $3\sqrt{147}-\dfrac{7}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}}-\sqrt{\dfrac{1}{27}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(a) $\dfrac{281\sqrt{3}}{9}$ (b) $\dfrac{181\sqrt{3}}{3}$

(c) $\dfrac{181\sqrt{3}}{9}$ (d) $\dfrac{381\sqrt{3}}{9}$

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-I) परीक्षा, 2014

उत्तर—(c)

हल : परंपरागत विधि

$$3\sqrt{147}-\frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{27}} = 3\sqrt{147}-\frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= 3\sqrt{49\times3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

$$= 3\times7\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{8}{3}$$

$$= 21\sqrt{3}-\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{21\times3}{\sqrt{3}}-\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{63\times 3}{3\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{189-8}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{181}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{181\sqrt{3}}{9}$$

प्रश्न 6. निम्नलिखित प्रश्न में प्रश्न-चिह्न (?) के स्थान पर क्या आना चाहिए?

$$31^{7.5} \div 31^{3/2} \times 31^{-3} = (\sqrt{31})^{?}$$

(a) 9/2 (b) 6
(c) 7/2 (d) 4

S.S.C. मल्टी टॉस्किंग परीक्षा, 2014

उत्तर—(b)

हल : परंपरागत विधि

$$31^{7.5} \div 31^{3/2} \times 31^{-3} = (\sqrt{31})^{?}$$

$$\frac{31^{7.5}}{31^{3/2}} \times 31^{-3} = (\sqrt{31})^{?}$$

$$\frac{31^{4.5}}{31^{1.5}} = (\sqrt{31})^{?}$$

$$31^{4.5-1.5} = (\sqrt{31})^{?}$$

$$31^{3} = (\sqrt{31})^{?}$$

$$(\sqrt{31})^{6} = (\sqrt{31})^{?}$$

घातांको की तुलना करने पर

$$? = 6$$

प्रश्न 7. यदि $3^{2x-y} = 3^{x+y} = \sqrt{27}$, तो 3^{x-y} का मान क्या होगा?

(a) 3 (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
(c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{27}}$

S.S.C. C.P.O. परीक्षा, 2015

उत्तर—(c)

हल : परंपरागत विधि

$$3^{2x-y} = 3^{x+y} = \sqrt{27}$$

$$\therefore\ 3^{2x-y} = 3^{x+y} = 3.3^{1/2}$$

$$3^{2x-y} = 3^{x+y} = 3^{3/2}$$

(घातों की तुलना करने पर)

$$\therefore\ 2x - y = \frac{3}{2} \text{ ..... (i)}$$

($\because$ आधार समान है, अतः घातें भी बराबर होंगी)

तथा $x + y = \frac{3}{2}$ .....(ii)

समी. (i) एवं (ii) को जोड़ने पर

$$3x = 2\times\frac{3}{2}$$

$$x = 1$$

x का मान समी. (ii) में रखने पर

$$y = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

अतः $3^{x-y} = 3^{1-\frac{1}{2}}$

$$= 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{3}$$

प्रश्न 8. यदि $\left(\frac{p^{-1}q^{2}}{p^{3}q^{-2}}\right)^{\frac{1}{3}} \div \left(\frac{p^{6}q^{-3}}{p^{-2}q^{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = p^{a}.q^{b}$ है, तो $a+b$ का मान क्या है जिसमें p और q विभिन्न धनात्मक अभाज्य हैं?

(a) 2 (b) 1
(c) 0 (d) –1

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2015

उत्तर—(*)

हल : परंपरागत विधि

$$\left(\frac{p^{-1}q^{2}}{p^{3}q^{-2}}\right)^{\frac{1}{3}} \div \left(\frac{p^{6}q^{-3}}{p^{-2}q^{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = p^{a}.q^{b}$$

$$\left(p^{-4}.q^{4}\right)^{\frac{1}{3}} \div \left(p^{8}.q^{-6}\right)^{\frac{1}{3}} = p^{a}.q^{b}$$

$$\frac{p^{-\frac{4}{3}}.q^{+\frac{4}{3}}}{p^{\frac{8}{3}}.q^{\frac{-6}{3}}} = p^{a}.q^{b}$$

$$p^{-\frac{4}{3}-\frac{8}{3}}.q^{+\frac{4}{3}+\frac{6}{3}} = p^{a}.q^{b}$$

$$p^{-\frac{12}{3}}.q^{+\frac{10}{3}} = p^a.q^b$$

$$p^{-4}.q^{+\frac{10}{3}} = p^a.q^b$$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर

$$a = -4 \text{ तथा } b = \frac{10}{3}$$

$$\therefore \quad a + b = \frac{-4}{1} + \frac{10}{3}$$

$$= \frac{-12+10}{3} = -\frac{2}{3}$$

प्रश्न 9. निम्नलिखित को अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर क्या प्राप्त होगा?

$\sqrt[3]{4}, \sqrt{2}, \sqrt[6]{3}, \sqrt[4]{5}$

(a) $\sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{3}$

(b) $\sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{4} > \sqrt[6]{3} > \sqrt{2}$

(c) $\sqrt{2} > \sqrt[6]{3} > \sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5}$

(d) $\sqrt[6]{3} > \sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{4} > \sqrt{2}$

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-I) परीक्षा, 2014

उत्तर—(a)

हल : परंपरागत विधि

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4 \times 4 \times 4 \times 4}$$

$$= \sqrt[12]{256}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$$

$$= \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{3 \times 3}$$

$$= \sqrt[12]{9}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5 \times 5 \times 5}$$

$$= \sqrt[12]{125}$$

$$\therefore \quad \sqrt[12]{256} > \sqrt[12]{125} > \sqrt[12]{64} > \sqrt[12]{9}$$

$$= \sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{3}$$

प्रश्न 10. निम्नलिखित को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर क्या प्राप्त होता है?

$3^{34}, 2^{51}, 7^{17}$

(a) $3^{34} > 2^{51} > 7^{17}$ (b) $7^{17} > 2^{51} > 3^{34}$

(c) $3^{34} > 7^{17} > 2^{51}$ (d) $2^{51} > 3^{34} > 7^{17}$

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-I) परीक्षा, 2014

उत्तर—(a)

हल : परंपरागत विधि

$$3^{34} = (3^2)^{17} = 9^{17}$$

$$2^{51} = (2^3)^{17} = 8^{17}$$

$$7^{17} = 7^{17} = 7^{17}$$

अत: $9^{17} > 8^{17} > 7^{17}$

$$= 3^{34} > 2^{51} > 7^{17}$$

प्रश्न 11. यदि $\frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} = A + \sqrt{B}$, तो $B - A$ है–

(a) –13 (b) $2\sqrt{13}$

(c) 13 (d) $3\sqrt{3} - \sqrt{7}$

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-I) परीक्षा, 2013

उत्तर—(c)

हल : परंपरागत विधि

$$\frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} = A + \sqrt{B}$$

$$\therefore \quad A + \sqrt{B} = \frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{4+3+2.2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{4+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(4+3\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{8-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}-9}{(4-3)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-1}{1}$$

$$= -1 + \sqrt{12}$$

दोनों तरफ तुलना करने पर

$$A = -1, B = 12$$

$\therefore$ $B - A = 12 - (-1) = 13$

प्रश्न 12. यदि $x = \sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}$, तो $x^3 + 3bx$ का मान है–

(a) 0 (b) a

(c) 2a (d) 1

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-I) परीक्षा, 2013

उत्तर–(c)

हल : परंपरागत विधि

$$x = \sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}} \text{ ..... (i)}$$

समी. (i) का घन करने पर

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}\right)^3$$

$$= a + \sqrt{a^2+b^3} + a - \sqrt{a^2+b^3} + 3\sqrt[3]{a+a^2+b^3}\sqrt[3]{a-(a^2+b^3)}$$

$$\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}} + \sqrt[3]{a-\left(\sqrt{a^2+b^3}\right)}\right)$$

$$= 2a + 3\sqrt[3]{\left(a+\sqrt{a^2+b^3}\right)\left(a-\sqrt{a^2+b^3}\right)} \times x$$

[समी. (i) से]

$$= 2a + 3\sqrt[3]{a^2-(a^2+b^3)}.x$$

$$= 2a - 3bx$$

$$x^3 + 3bx = 2a$$

प्रश्न 13. यदि $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} = a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c$ और a, b, c परिमेय संख्याएं हैं, तो $a + b + c$ का मान है–

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-I) परीक्षा, 2013

उत्तर–(a)

हल : परंपरागत विधि

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} = \sqrt[3]{4}.a + \sqrt[3]{2}.b + c$$

$$\frac{1}{2^{2/3}+2^{1/3}+1} = 2^{2/3}.a + 2^{1/3}.b + c$$

$$\frac{2^{1/3}-1}{(2^{1/3}-1)(2^{2/3}+2^{1/3}+1)} = 2^{2/3}.a + 2^{1/3}.b + c$$

(अंश और हर में $2^{1/3}-1$ से गुणा करने पर)

$$\frac{2^{1/3}-1}{2+2^{2/3}+2^{1/3}-2^{2/3}-2^{1/3}-1} = 2^{2/3}.a + 2^{1/3}.b + c$$

$$\frac{2^{1/3}-1}{2-1} = 2^{2/3}.a + 2^{1/3}.b + c$$

$$2^{1/3} - 1 = 2^{2/3}.a + 2^{1/3}.b + c$$

$(2^{1/3}-1)$ को विस्तार करके निम्न प्रकार लिख सकते हैं-

$$2^{2/3}.0 + 2^{1/3}.1 - 1 = 2^{2/3}.a + 2^{1/3}.b + c$$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर

$a = 0$

$b = 1$

$c = -1$

अब $a + b + c = 0 + 1 - 1$

$= 0$

प्रश्न 14. $6^{333} \times 7^{222} \times 8^{111}$ में अभाज्य गुणनखंडों की संख्या कितनी है?

(a) 1211 (b) 1221

(c) 1222 (d) 1111

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2013

उत्तर–(b)

हल : परंपरागत विधि

$$6^{333} \times 7^{222} \times 8^{111} = (2\times3)^{333} \times 7^{222} \times (2\times2\times2)^{111}$$

$$= 2^{333} \times 3^{333} \times 7^{222} \times 2^{111} \times 2^{111} \times 2^{111}$$

$\therefore$ अभाज्य गुणनखंडों की अभीष्ट संख्या = घातों का योग

$= 333 + 333 + 222 + 111 + 111 + 111$

$= 1221$

प्रश्न 15. $2^{250}, 3^{150}, 5^{100}$ तथा 4^{200} संख्याओं में सबसे छोटी संख्या कौन-सी है?

(a) 4^{200} (b) 5^{100}

(c) 3^{150} (d) 2^{250}

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2013

उत्तर—(b)

हल : परंपरागत विधि

दी गई संख्याएं

$$2^{250}, 3^{150}, 5^{100}, 4^{200} = 2^{50\times5}, 3^{50\times3}, 5^{50\times2}, 4^{50\times4}$$

$$= (2^5)^{50}, (3^3)^{50}, (5^2)^{50}, (4^4)^{50}$$

$$= (32)^{50}, (27)^{50}, (25)^{50}, (256)^{50}$$

अत: सबसे छोटी संख्या $= (25)^{50}$

$$= 5^{100}$$

प्रश्न 16. $\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt[3]{4....}}}}}}$ का मान कितना है?

(a) 2 (b) 2^2

(c) 2^3 (d) 2^5

S.S.C. C.P.O. परीक्षा, 2004

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2013

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2010

उत्तर—(a)

हल : परंपरागत विधि

माना $x = \sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt[3]{4\ .....}}}}$

$x = \sqrt{2\sqrt[3]{4\times x}}$ .....

वर्ग करने पर

$$x^2 = 2\sqrt[3]{4x}$$

$$\frac{x^2}{2} = \sqrt[3]{4x}$$

घन करने पर

$$\frac{x^6}{8} = 4x$$

$$\frac{x^6}{x} = 4\times 8$$

$$x^5 = 2^5$$

घातों की तुलना करने पर $x = 2$

प्रश्न 17. यदि $a = 7 - 4\sqrt{3}$ हो, तो $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$ का मान कितना होगा?

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{3}$

(c) 4 (d) 7

S.S.C. F.C.I. (Tier-II) परीक्षा, 2013

उत्तर—(c)

हल : परंपरागत विधि

दिया है $a = 7 - 4\sqrt{3}$

वर्गमूल लेने पर

$$\sqrt{a} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{4 + 3 - 2\times 2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

पुन: प्रश्न से

$$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{a+1}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{7 - 4\sqrt{3} + 1}{2 - \sqrt{3}} \text{ (मान रखने पर)}$$

$$= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2 - \sqrt{3}} \Rightarrow 4$$

प्रश्न 18. यदि $x + \frac{a}{x} = 1$, तो $\frac{x^2 + x + a}{x^3 - x^2}$ मान है–

(a) -2 (b) $-\frac{a}{2}$

(c) $\frac{2}{a}$ (d) $-\frac{2}{a}$

S.S.C. स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2012

उत्तर—(d)

हल : परंपरागत विधि

दिया है $x+\frac{a}{x}=1$ .....(i)

या $x^2+a=x$ .....(ii)

अब प्रश्न से $\frac{x^2+x+a}{x^3-x^2}=\frac{(x^2+a)+x}{x^2(x-1)}$

$$=\frac{x+x}{x^2[x-(x+\frac{a}{x})]}$$

$$=\frac{2x}{x^2[x-x-\frac{a}{x}]}$$

$$=\frac{2x}{x^2\times(-\frac{a}{x})}$$

$$=\frac{2x}{-ax}\Rightarrow-\frac{2}{a}$$

प्रश्न 19. $9^{19}+6$ को 8 से विभाजित करने पर शेष है—

(a) 2 (b) 3

(c) 5 (d) 7

S.S.C. स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2011,2012

S.S.C. C.P.O. परीक्षा, 2005

उत्तर—(d)

हल : सामान्य समझ पर

सर्वप्रथम 9^{19} में इकाई का अंक ज्ञात करेंगे। घात की संख्या 19 में 4 से भाग देने पर शेषफल = 3, संख्या 9 की घात होगी।

$\therefore$ 9^{19} में इकाई का अंक $=7^3$

$=729$ (इकाइ का अंक 9)

अब इकाई के अंक 9 में 6 जोड़ने पर प्राप्त संख्या = 15 तथा संख्या 15 में 8 से भाग देने पर शेषफल 7 प्राप्त होगा जो अभिष्ट है।

प्रश्न 20. यदि $(2^x)(2^y)=8$ तथा $(9^x)(3^y)=81$ हो, तो (x, y) क्या होगा?

(a) (1, 2) (b) (2, 1)

(c) (1, 1) (d) (2, 2)

S.S.C. F.C.I. परीक्षा, 2012

उत्तर—(a)

हल : विकल्प विधि

विकल्प (a) से

$(2^x)(2^y)=8$ को संतुष्ट करने पर

$(2^1)(2^2)=8$

या $8=8$

पुनः विकल्प (a) से

$(9^x)(3^y)=81$ को संतुष्ट करने पर

$9^1\times3^2=81$

$9\times9=81$

$81=81$

अतः स्पष्ट है कि x एवं y के मान 1 व 2 होंगे। अतः विकल्प (a) सही है।

परंपरागत विधि

$(2^x)(2^y)=8$ तथा $(9^x)(3^y)=81$

$2^{x+y}=2^3$ तथा $(3^{2x})(3^y)=81$

$2^{x+y}=2^3$ तथा $3^{2x+y}=3^4$

घातांकों की तुलना करने पर

$x+y=3$..... (i) तथा $2x+y=4$ ..... (ii)

समी. (i) और समी. (ii) को हल करने पर

$x=1,\ y=2$

अतः स्पष्ट है कि x और y के मान (1, 2) है।

प्रश्न 21. वह संख्या, जिसे $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ के साथ गुणा करने पर $(\sqrt{12}+\sqrt{18})$ प्राप्त होता है —

(a) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

(c) $\sqrt{6}$ (d) $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

S.S.C. संयुक्त हायर सेकेण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2010

उत्तर—(c)

हल : परंपरागत विधि

माना संख्या x है।

$\therefore$ प्रश्न से-

$$x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{12}+\sqrt{18}$$

$$x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{6\times 2}+\sqrt{6\times 3}$$

$$x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$

$$\therefore \quad x=\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}\Rightarrow\sqrt{6}$$

प्रश्न 22. $2^{x+3}+2^{x+2}+2^{x-1}=1600$ हो, तो x का मान क्या है ?

(a) 5 **(b)** 7
(c) 9 **(d)** 8

R.R.B. भोपाल (T.C./C.C./J.C.) 'मुख्य' परीक्षा, 2012

उत्तर—(b)

हल : परंपरागत विधि

$$2^{x+3}+2^{x+2}+2^{x-1}=1600$$

$$\therefore\ 2^x\times 2^3+2^x\times 2^2+\frac{2^x}{2}=1600$$

$$8\times 2^x+4\times 2^x+\frac{2^x}{2}=1600$$

$$16\times 2^x+8\times 2^x+2^x=1600\times 2$$

$$25\times 2^x=1600\times 2$$

$$2^x=64\times 2$$

$$2^x=2^7$$

घातों की तुलना करने पर-

$$x=7$$

प्रश्न 23. यदि $3^{(x-y)}=27$ और $3^{(x+y)}=243$, तो का x मान क्या होगा?

(a) 0 **(b)** 2
(c) 4 **(d)** 6

R.R.B. कोलकाता (A.S.M.) परीक्षा, 2010

उत्तर—(c)

हल : परंपरागत विधि

$3^{(x-y)}=27$ $\qquad$ $3^{(x+y)}=243$

$3^{(x-y)}=3^3$ $\qquad$ $3^{(x+y)}=3^5$

घातांकों की तुलना करने पर

$(x-y)=3$.....(i)

$(x+y)=5$.....(ii)

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर

$2x=8$

$x=4$

प्रश्न 24. यदि $8^{x+2}=64$ हो, तो $3^{2(x+1)}$ का मान होगा-

(a) 1 **(b)** 9
(c) 27 **(d)** 81

R.R.B. कोलकाता (G.G.) परीक्षा, 2006

उत्तर—(b)

हल : परंपरागत विधि

$$8^{(x+2)}=64$$

$$8^{(x+2)}=8^2$$

घातों की तुलना करने पर

$\therefore\quad x+2=2$

$x=0$

$\therefore\quad 3^{2(x+1)}=3^{2(0+1)}$

$=3^2\Rightarrow 9$

प्रश्न 25. यदि $\sqrt{4^n}=1024$, तब n का मान होगा-

(a) 5 **(b)** 8
(c) 12 **(d)** 10

R.R.B. गोरखपुर (D. Driv.) परीक्षा, 2006

उत्तर—(d)

हल : परंपरागत विधि

$$\sqrt{4^n}=1024,$$

$$4^n=(1024)^2$$

$$=(4\times4\times4\times4\times4)^2$$

$$=(4^5)^2$$

$$4^n=4^{10}$$

$$\therefore\quad n=10$$

प्रश्न 26. यदि $3^a5^b7^c=1575$ है, तो

(a) $a=2, b=1, c=2$

(b) $a=1, b=2, c=2$

(c) a = 2, b = 2, c = 1

(d) a = 3, b = 2, c = 1

R.R.C. दिल्ली (ग्रुप-D) परीक्षा, 2013

उत्तर—(c)

हल : परंपरागत विधि

यहां $3^a5^b7^c = 1575$

$= 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$

$\therefore\ 3^a5^b7^c = 3^2 5^2 7^1$

$\therefore$ दोनों पक्षों के घातों की तुलना करने पर a = 2, b = 2 एवं c = 1

प्रश्न 27. $\left(-\frac{1}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$ का मान है-

(a) 49 (b) –49

(c) $\frac{1}{49}$ (d) $-\frac{1}{49}$

U.P. U.D.A./L.D.A. (SPL) (Pre) 2010

उत्तर—(a)

हल : परंपरागत विधि

$$\left(-\frac{1}{343}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(-\frac{1}{7}\right)^{3\times-\frac{2}{3}}$$

$$= \left(-\frac{1}{7}\right)^{-2}$$

$$= (-7)^2 \Rightarrow 49$$

प्रश्न 28. $\left[\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{-2}\right]^{-1}$ का मान है :

(a) $-\frac{1}{81}$ (b) $\frac{1}{81}$

(c) –81 (d) 81

M.P.P.C.S. (Pre) (CSAT) 2012

उत्तर—(b)

हल : परंपरागत विधि

$$\left[\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{-2}\right]^{-1} = \left[\left\{\frac{1}{9}\right\}^{-2}\right]^{-1} = \left[(9)^2\right]^{-1}$$

$$= [81]^{-1} = \frac{1}{81}$$

प्रश्न 29. यदि $2^{2x+4} = 16^x$, तो x^3 बराबर है :

(a) 16 के (b) 4 के

(c) 8 के (d) 2 के

U.P.P.C.S. (Mains) 2005

उत्तर—(c)

हल : परंपरागत विधि

$2^{2x+4} = 16^x$

$2^{2x+4} = (2^4)^x$

$2^{2x+4} = 2^{4x}$

घातों की तुलना करने पर

$4x - 2x = 4$

$x = \frac{4}{2} = 2$

$\therefore\ x^3 = 2^3 = 8$

प्रश्न 30. यदि $\sqrt{256} \div \sqrt{x} = 2$ तो x होगा-

(a) 58 (b) 64

(c) 78 (d) 138

U.P.P.C.S. (Pre) 2007

उत्तर–(b)

हल : परंपरागत विधि

$\sqrt{256} \div \sqrt{x} = 2$ $16 \div \sqrt{x} = 2$

$16 \times \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{16}$

$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \sqrt{x} = 8$

$\therefore\ x = 8^2 = 64$